H. TREBITSCH M. FAYALA

GÉOMÉTRIE

TROISIÈME ANNÉE
de l'enseignement secondaire

STD

H. TRÉBITSCH M. FAYALA

Professeurs au Lycée de Sousse

GÉOMÉTRIE

TROISIÈME ANNÉE

de l'enseignement secondaire

ÉDITION 1969

SOCIÉTÉ TUNISIENNE DE DIFFUSION

© S. T. D.

Tous droits réservés

CHAPITRE I

RAPPORT DE DEUX SEGMENTS — RAPPORT DE DEUX VECTEURS

(1re LEÇON)

1. Rapport de deux segments.

1°. Soit deux segments AB et CD.

Supposons que CD soit la somme de trois segments égaux à AB (fig. 1).

Le segment CD est le **produit** du segment AB par 3.

On écrit: $CD = AB \times 3$ ou $CD = 3\,AB$.

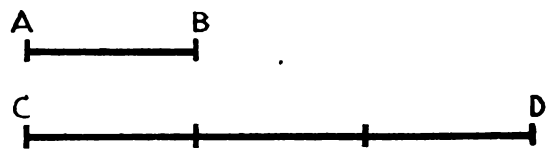

Fig 1

2°. Soit deux segments MN et PQ.

Supposons que PQ soit la somme de deux segments égaux au cinquième de MN (fig. 2).

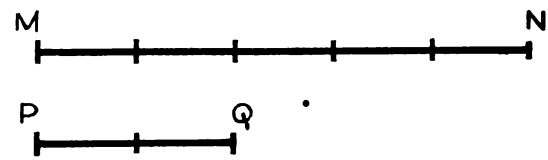

Fig. 2

Le segment PQ est le produit du segment MN par la fraction $\frac{2}{5}$.

On écrit: $PQ = MN \times \frac{2}{5}$ ou: $PQ = \frac{2}{5}\,MN$.

3°. Dans le premier exemple, nous avons:

$$CD = AB \times 3$$

Nous dirons que 3 est **le rapport du segment CD au segment AB.**
Dans le deuxième exemple, nous avons:

$$PQ = MN \times \frac{2}{5}$$

Nous dirons que $\frac{2}{5}$ est **le rapport du segment PQ au segment MN.**

D'une façon générale:

Le rapport de deux segments est le nombre par lequel il faut multiplier le second pour avoir le premier.

On note: $\frac{CD}{AB} = 3$ et: $\frac{PQ}{MN} = \frac{2}{5}$.

2. Propriété du rapport de deux segments.

Soit deux segments AB et CD mesurant respectivement 12 cm et 5 cm (fig. 3).

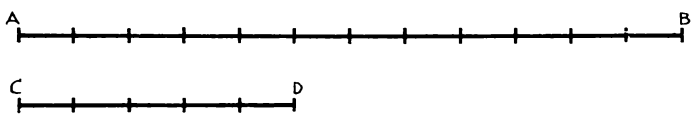

Fig. 3

Le segment CD est la somme de cinq segments égaux à un centimètre, c'est-à-dire de cinq segments égaux au douzième de AB.

On a ainsi: $CD = AB \times \frac{5}{12}$

ou: $\frac{CD}{AB} = \frac{5}{12} = \frac{\text{mesure de } CD}{\text{mesure de } AB}$.

Le rapport de deux segments est égal au quotient des nombres qui les mesurent avec la même unité.

Si les mesures de AB et CD sont des nombres décimaux, un changement d'unité les rend entières.

Si AB = 12,3 cm et CD = 5,4 cm, il vient, en prenant pour unité le millimètre:

$AB = 123$ mm $\qquad CD = 54$ mm

$\frac{CD}{AB} = \frac{54}{123} = \frac{5,4}{12,3}$.

(2° LEÇON)

3. Rapport de deux vecteurs.

Rappelons que la mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est le nombre relatif dont la valeur absolue est le module du vecteur et dont le signe est «+» ou «—» suivant que le vecteur et l'axe sont de même sens ou de sens contraires (Algèbre III).

Ainsi (fig. 4): $\overline{AB} = +5$, $\overline{CD} = -3$, etc.

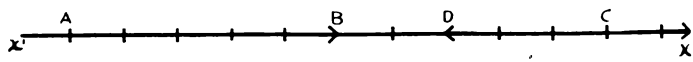

Fig. 4

4. Définition du rapport de deux vecteurs portés par un même axe.

Le rapport de deux vecteurs portés par un même axe est le nombre relatif dont la valeur absolue est le rapport des modules des deux vecteurs et dont le signe est «+» ou «—» suivant que les deux vecteurs sont de même sens ou de sens contraires.

On a (fig. 4): $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\dfrac{5}{3}$.

Formons le rapport des mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (fig. 4).

Il vient:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{+5}{-3} = -\frac{5}{3}.$$

Ainsi:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = -\frac{5}{3}.$$

Le rapport de deux vecteurs portés par un même axe est égal au rapport de leurs mesures algébriques sur cet axe.

(3e LEÇON)

5. Points divisant un segment dans un rapport arithmétique donné.

Soit un segment AB de longueur 40 cm, porté par une droite xy (fig. 5).

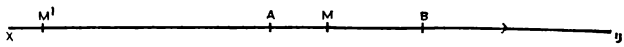

Fig. 5

Nous nous proposons de trouver des points divisant le segment AB dans le rapport $\frac{3}{5}$.

1°. S'il existe un point M entre A et B, divisant AB dans le rapport $\frac{3}{5}$, on aura: $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$

et $MA + MB = 40$.

La première relation donne, compte tenu de la deuxième:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{MA}{3} = \frac{MA + MB}{3 + 5} = \frac{AB}{8} = \frac{40}{8} = 5 \ .$$

D'où:

$$\frac{MA}{3} = 5 \Leftrightarrow MA = 15 \text{ cm} \ .$$

$$\frac{MB}{5} = 5 \Leftrightarrow MB = 25 \text{ cm} \ .$$

La connaissance de MA et de MB nous permet de placer avec précision le point M sur le segment AB.

Remarquons que nous avons obtenu une seule valeur pour MA et une seule valeur pour MB : *il y a donc un seul point M situé entre A et B et divisant AB dans le rapport* $\frac{3}{5}$.

Il en aurait été de même si, au lieu de $\frac{3}{5}$, on avait eu tout autre rapport.

Ainsi: **il existe un point M et un seul divisant INTÉRIEUREMENT un segment donné dans un rapport donné.**

Si ce rapport est égal à 1, le point M est le milieu du segment AB.

2°. S'il existe un point M′ situé à l'extérieur du segment AB, et le divisant dans le rapport $\frac{3}{5}$, ce point peut se trouver soit sur la demi-droite By, soit sur la demi-droite Ax.

a) Le rapport $\frac{3}{5}$ étant inférieur à 1, il n'existe pas sur la demi-droite By de point M′ tel que $\frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{5}$ car, pour tout point M′ de cette demi-droite, on a:

$$M'A > M'B \quad \text{ou} \quad \frac{M'A}{M'B} > 1 .$$

b) Pour tout point M′ de la demi-droite Ax, on a:

$$M'A < M'B \quad \text{ou} \quad \frac{M'A}{M'B} < 1 .$$

Il est possible de trouver un point M′ de la demi-droite Ax tel que:

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{5}$$

et

$$M'B - M'A = 40 .$$

La première relation donne, compte tenu de la deuxième:

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{M'A}{3} = \frac{M'B}{5} = \frac{M'B - M'A}{5 - 3} = \frac{40}{2} = 20 .$$

D'où:

$$\frac{M'A}{3} = 20 \Leftrightarrow M'A = 60 \text{ cm} .$$

$$\frac{M'B}{5} = 20 \Leftrightarrow M'B = 100 \text{ cm} .$$

La connaissance de M′A et de M′B nous permet de placer avec précision le point M′ sur la demi-droite Ax.

Remarquons que nous avons obtenu une seule valeur pour M′A et une seule valeur pour M′B; *il y a donc un seul point M′ situé sur Ax et divisant AB dans le rapport* $\frac{3}{5}$.

Il en aurait été de même si, au lieu de $\frac{3}{5}$, on avait pris tout autre rapport inférieur à 1.

Si le rapport donné est plus grand que 1, un calcul analogue au précédent nous montrerait qu'il n'existe aucun point de la demi-droite Ax divisant le segment AB dans le rapport donné et qu'il en existe un seul sur la demi-droite By.

Si ce rapport est égal à 1, il n'existe pas de point M′ situé à l'extérieur du segment AB et tel que $\frac{M'A}{M'B} = 1$.

En effet: $\frac{M'A}{M'B} = 1 \Leftrightarrow M'A = M'B$.

Or pour tout point extérieur à AB, la différence des segments M′A et M′B est égale à AB; ces segments ne peuvent donc être égaux.

Ainsi: **il existe un point M′ et un seul divisant EXTÉRIEUREMENT un segment donné dans un rapport donné différent de 1.**

EN RÉSUMÉ:

> **Il existe deux points M et M′ divisant un segment AB dans un rapport arithmétique donné différent de 1.**
> **L'un des deux points est entre A et B; l'autre est extérieur au segment AB.**

ON DIT QUE M ET M′ SONT **CONJUGUÉS HARMONIQUES** PAR RAPPORT AUX POINTS A ET B.

(4° LEÇON)

6. Points divisant un segment dans un rapport algébrique donné.

Soit de nouveau un segment AB de longueur 40 cm porté par une droite xy et les points M et M′ divisant ce segment dans le rapport $\frac{3}{5}$ (fig. 6).

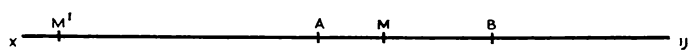

Fig. 6

Orientons xy.

Il vient: $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{3}{5}$

et: $$\frac{\overrightarrow{M'A}}{\overrightarrow{M'B}} = \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = +\frac{3}{5}.$$

Le point M situé entre A et B détermine deux vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ de sens contraires.

Il divise AB dans le rapport algébrique négatif: $-\frac{3}{5}$.

Le point M′ situé sur Ax détermine deux vecteurs $\overrightarrow{M'A}$ et $\overrightarrow{M'B}$ de même sens.

Il divise AB dans le rapport algébrique positif: $+\frac{3}{5}$.

Ainsi: **il existe un point et un seul divisant un segment AB dans un rapport algébrique donné différent de +1.**

1° Si le rapport donné est positif et différent de 1, le point est extérieur à AB.

2° Il n'y a pas de point divisant un segment donné dans un rapport algébrique égal à + 1.

3° Si le rapport donné est négatif, ce point est entre A et B.

4° Si le rapport donné est nul on a:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 0 \Rightarrow \overline{MA} = 0.$$

Le point cherché est en A.

RÉSUMÉ

Le rapport de deux segments est le nombre par lequel il faut multiplier le second pour avoir le premier.

Le rapport de deux segments est égal au quotient des nombres les mesurant avec la même unité.

Le rapport de deux vecteurs portés par un même axe est le nombre relatif dont la valeur absolue est le rapport des modules des deux vecteurs et dont le signe est «+» ou «—» suivant que les deux vecteurs sont de même sens ou de sens contraires.

Le rapport de deux vecteurs portés par un même axe

est égal au rapport de leurs mesures algébriques sur cet axe.

Il existe deux points M et M′ divisant un segment AB dans un rapport arithmétique donné différent de 1.

L'un des deux points est entre A et B; l'autre est extérieur au segment AB.

Il existe un point et un seul divisant un segment AB dans un rapport algébrique donné différent de +1.

EXERCICES

1. — Soit: $\frac{AB}{MN} = \frac{5}{7}$ et $\frac{EF}{MN} = \frac{4}{3}$. Évaluez le rapport $\frac{AB}{EF}$

2. — Soit: $\frac{AB}{MN} = \frac{8}{11}$ et $\frac{CD}{MN} = \frac{5}{7}$. Évaluez le rapport $\frac{AB}{CD}$

3. — On donne les vecteurs: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{MN}$.
On sait que $\overline{AB} = (+7)$; $\overline{CD} = (-9)$; $\overline{EF} = (-17)$ et $\overline{MN} = (-2)$.
Évaluez les rapports suivants:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}\ ;\ \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{EF}}\ ;\ \frac{\overrightarrow{EF}}{\overrightarrow{AB}}\ ;\ \frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{CD}}\ ;\ \frac{\overrightarrow{EF}}{\overrightarrow{MN}}\ ;\ \frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{AB}}$$

4. — Deux segments sont tels que AD = 25 mm et CD = 4,3 cm. Évaluez leur rapport.

5. — Deux segments sont tels que AD = $\frac{30}{4}$ cm et CD = 2,5 cm. Évaluez leur rapport.

6. — Un segment AB mesure 8,3 cm. Placez sur la droite AB un point C situé à 3,5 cm du point A.

Calculez les rapports $\frac{CA}{CB}$ et $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$ (2 cas sont possibles).

7. — Le rapport de AB à CD est $\frac{7}{5}$.
Le segment AB mesure 217 mm. Quelle est la mesure de AB ?

8. — On pose $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$. Calculez les rapports suivants:

$$\frac{4AB}{CD}, \frac{AB}{5CD}, \frac{7AB}{4CD}.$$

9. — Soit un segment AB de longueur 8 cm.
Placez sur ce segment les points I, C et C′ tels que:

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -1. \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{3}{5}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{5}{3}.$$

Comment sont placés les points C et C′ par rapport à I ?

10. — Un segment AB mesure 45 cm. Calculez les longueurs des segments CA, CB, DA, DB sachant que $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{2}{7}$.

Calculez les rapports $\frac{AC}{AD}$ et $\frac{BC}{BD}$. Que remarquez-vous ?

11. — Un segment AB mesure 8 cm .Calculez les longueurs des segments CA, CB, DA, DB sachant que $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{3}{5}$.

Soit I le milieu de AB. Calculez IC, ID et IA.
Vérifiez que $IC.ID = IA^2$.

12. — Soit un segment AB de longueur 18 cm.

a) Trouvez les points M et M′ qui divisent AB dans le rapport $\frac{5}{7}$.

b) Calculez la longueur du segment MM′.

13. — Soit un segment AB de longueur a, et M, M′ les points qui le divisent dans le rapport $\frac{2}{3}$.

Calculez, en fonction de a, les segments MA, MB, M′A, M′B et MM′.

14. — Soit un segment AB de longueur a et M, M′, les points qui le divisent dans le rapport $\frac{m}{n}$.

Calculez en fonction de a, m et n les segments MA, MB, M′A, M′B et MM′.

15. — Le point M partage intérieurement le segment AB dans le rapport $\frac{3}{5}$.
Calculez la longueur de AB sachant que celle de AM est 9 cm.

16. — Le point M′ partage extérieurement le segment AB dans le rapport $\frac{7}{9}$. Calculez la longueur de AB sachant que celle de M′A est 14 cm.

17. — Les points M et M′ divisent le segment AB dans le rapport $\frac{7}{13}$. Calculez la longueur de AB sachant que celle de MM′ est 91 cm.

18. — Trouvez les deux points M et M′ qui divisent un segment AB de longueur 7,8 cm dans le rapport $\frac{5}{8}$.

a) Soit O le milieu de AB, vérifiez la relation: $\overline{OA}^2 = \overline{OM} \times \overline{OM'}$

b) Vérifiez la relation: $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AM}} + \frac{1}{\overline{AM'}}$.

c) Soit I le milieu de MM′. Calculez les rapports $\frac{IA}{IM}$ et $\frac{\overline{IM'}}{\overline{IB}}$.

19. — On considère sur un axe x′x les points fixes A et B tels que $\overline{AB} = 84$ mm.

1°) Construisez les points C et D de cet axe tels que: $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{2}{5}$.

2°) Soit O le milieu de CD. Calculez $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ et vérifiez les relations: $\overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 = \overline{OA}.\overline{OB}$, $\overline{BA}.\overline{BO} = \overline{BC}.\overline{BD}$.

CHAPITRE II

THÉORÈME DE THALÈS

(5e LEÇON)

7. Parallèles équidistantes.

Soit les parallèles D_1, D_2, D_3, D_4 et deux droites Δ et Δ' les coupant respectivement en A, B, C, D et A', B', C', D' (fig. 7).

Supposons AB = CD.

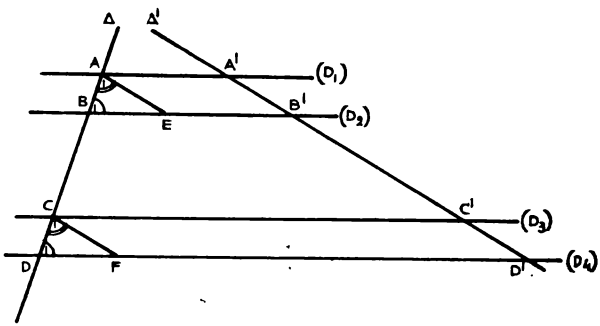

Fig. 7

Nous nous proposons de comparer les segments A'B' et C'D'.

Menons par A et C les parallèles à Δ' et soit E et F respectivement les intersections de ces droites avec D_2 et D_4.

Le quadrilatère AEB'A', ayant ses côtés parallèles deux à deux, est un parallélogramme et il en est de même du quadrilatère CFD'C'.

Il en résulte:

$$AE = A'B' \text{ et } CF = C'D'.$$

Les triangles ABE et CDF ont:

AB = CD (par hypothèse),

$\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (angles correspondants),

$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (angles correspondants).

Ils sont égaux. On en déduit: AE = CF.

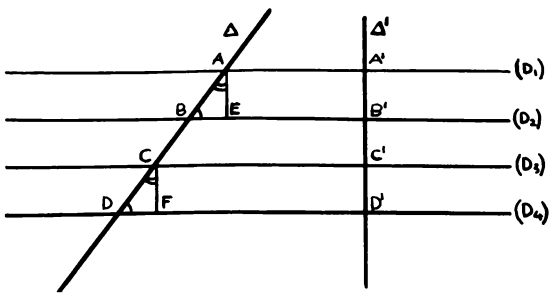

Fig. 8

Par suite: A'B' = C'D'.

En particulier, si on a (fig. 8): AB = BC = CD,

On aura: A'B' = B'C' = C'D'.

Les segments tels que AB et A'B', BC et B'C', CD et C'D' compris entre les mêmes parallèles sont dits **correspondants.**

On peut énoncer:

Si des parallèles déterminent des segments égaux sur une première sécante, elles déterminent des segments correspondants égaux sur toute autre sécante.

Si la sécante Δ' (fig. 8) est perpendiculaire aux parallèles D_1, D_2, D_3, D_4, les segments égaux A'B', B'C' et C'D' sont respectivement les distances de D_1 à D_2, de D_2 à D_3 et de D_3 à D_4.

Les parallèles sont ainsi équidistantes.

8. Application: partage d'un segment en parties égales.

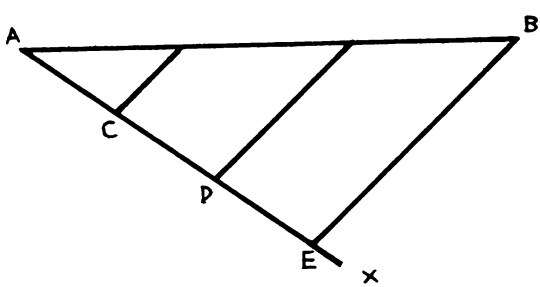

Fig. 9

Soit à partager un segment AB en trois parties égales (fig. 9).

Portons à partir de A sur une demi-droite auxiliaire Ax, trois segments consécutifs égaux, AC, CD et DE.

Joignons l'extrémité E au point B et menons par C et D les parallèles à BE.

Ces parallèles, déterminant sur Ax des segments égaux, déterminent sur AB des segments égaux.

On a ainsi partagé AB en trois parties égales.

(6e LEÇON)

9. Théorème de Thalès.

Soit les parallèles D_1, D_2, D_3, D_4 et deux droites Δ et Δ' les coupant en A, B, C, D et A', B', C', D'. (fig. 10).

Supposons que les segments AB et CD soient inégaux et que leur rapport soit égal à $\frac{2}{3}$.

On sait que: $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AB = CD \times \frac{2}{3}$

En partageant CD en trois segments égaux, AB est la somme de deux de ces segments (1e leçon).

On a vu plus haut comment il est possible de partager CD en trois parties égales et AB en deux parties égales.

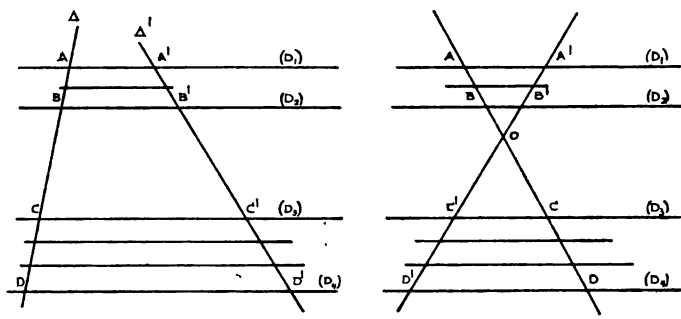

Fig. 10

Menons, par les points de division obtenus, les parallèles à AA'.

Ces parallèles, déterminant sur Δ des segments égaux, déterminent sur Δ' des segments égaux.

Remarquons que A'B' est partagé en deux segments et C'D' en trois, tous égaux entre eux.

Il en résulte que: $A'B' = C'D' \times \frac{2}{3}$.

ou: $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{2}{3}$

On a ainsi:

$$\boxed{\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}}$$

On démontre de la même manière que: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$; $\frac{AB}{AD} = \frac{A'B'}{A'D'}$ ... etc.

Si on coupe des parallèles par deux droites, le rapport de deux segments quelconques déterminés sur l'une des sécantes est égal au rapport des segments correspondants déterminés sur l'autre sécante.

Intervertissons les moyens dans les différentes proportions obtenues plus haut.

Il vient:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} ; \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} ; \frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'} \ldots \text{ etc.}$$

Il en résulte:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AD}{A'D'} = \ldots$$

Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants proportionnels.

Orientons les sécantes Δ et Δ'.

Les mesures algébriques des vecteurs de même sens $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ ... sont de même signe.

Il en est de même de celles des vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'D'}$.

Les rapports tels que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} \ldots$, égaux en valeur absolue, ont aussi le même signe.

Il en résulte:

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}}}$$

(7e LEÇON)

10. Application au triangle.

1°. Soit un triangle ABC et une parallèle au côté BC coupant les côtés AB et AC ou leurs prolongements en des points M et N (fig. 11).

Soit Ax la parallèle à BC menée par A.

Les parallèles Ax, MN et BC déterminent sur les sécantes AB et AC des segments correspondants proportionnels.

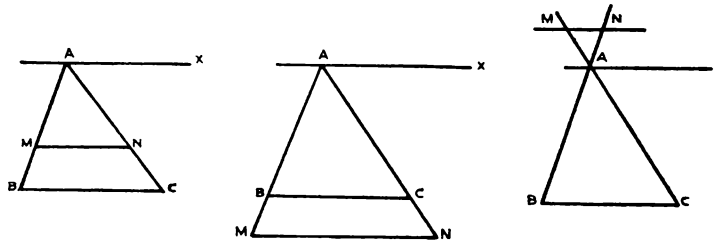

Fig. 11

Il vient: $\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$.

Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments correspondants proportionnels.

On a également: $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

2°. Supposons, réciproquement, qu'un point M du côté AB et un point N du côté AC soient tels que: $\frac{\overline{MA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$.

Les points M et N divisent ainsi respectivement les côtés AB et AC dans le même rapport algébrique (fig. 12).

Menons par M la parallèle à BC: elle coupe le côté AC en un point N'.

Le théorème de Thalès appliqué au triangle ABC donne:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{N'A}}{\overline{N'C}}.$$

Or:
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}.$$

Il en résulte:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{N'A}}{\overline{N'C}}.$$

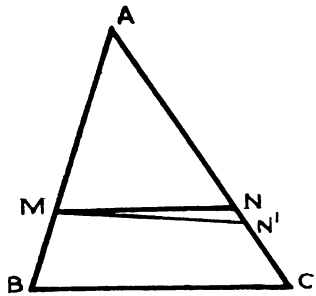

Fig. 12

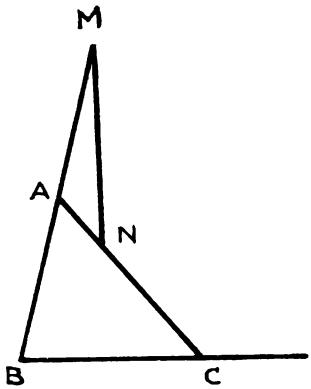

Fig. 13

Les points N et N′ divisent ainsi le segment AC dans le même rapport algébrique.

Ils sont confondus car il n'existe qu'un seul point divisant un segment dans un rapport algébrique donné (4ᵉ leçon).

La droite MN est donc parallèle au support du côté BC.

3°. Remarquons que la démonstration précédente nécessite l'égalité des rapports algébriques $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ et $\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$.

En effet, supposons que l'on ait: $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC}$.

Menons par M la parallèle à BC (fig. 12); elle coupe AC en N′.

Il en résulte: $\frac{MA}{MB} = \frac{N'A}{N'C}$.

On a donc: $\frac{NA}{NC} = \frac{N'A}{N'C}$.

Les points N et N′ divisant AC dans le même rapport arithmétique ne sont pas obligatoirement confondus.

Ils peuvent diviser l'un intérieurement, l'autre extérieurement le segment BC dans le même rapport (3ᵉ leçon).

Ainsi la droite MN peut ne pas être parallèle au support de BC.

Sur la figure 13, on a considéré les points M et N tels que:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{NA}{NC} = \frac{1}{2}.$$

MN n'est pas parallèle à BC.

MN est parallèle à BC si on choisit le point M divisant intérieurement le segment AB dans le rapport $\frac{1}{2}$.

(8e LEÇON)

11. Application au trapèze

1°. Soit un trapèze ABCD et une parallèle aux bases coupant les côtés BC et AD ou leurs prolongements respectivement en M et N (fig. 14).

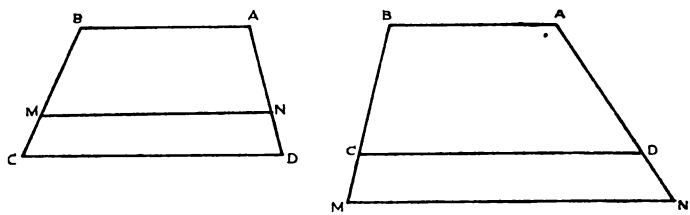

Fig. 14

Les parallèles BA, MN et CD déterminent sur les côtés BC et AD des segments correspondants proportionnels.

Il vient: $$\frac{BM}{AN} = \frac{MC}{ND} = \frac{BC}{AD}.$$

Toute parallèle aux bases d'un trapèze détermine sur les côtés non parallèles des segments correspondants proportionnels.

On a également: $$\frac{\overline{BM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}.$$

2°. Supposons, réciproquement, qu'un point M du côté BC et un point N du côté AD soient tels que: $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$

On montre de la même manière que dans le cas du triangle que *la droite MN est alors parallèle aux supports des bases AB et DC.*

(9° LEÇON)

12. Application du théorème de Thalès à la résolution de certains problèmes de construction.

1°. Quatrième proportionnelle à trois segments donnés.

Soit trois segments de longueurs a, b, c. (fig. 15).

Nous nous proposons de construire le segment dont la longueur x est telle que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

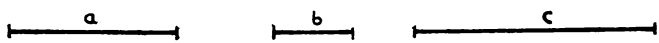

Fig. 15

Portons sur le côté Ox d'un angle $\widehat{xOy}$ les longueurs OA = a et AB = b. Portons sur l'autre côté la longueur OC = c (fig. 16).

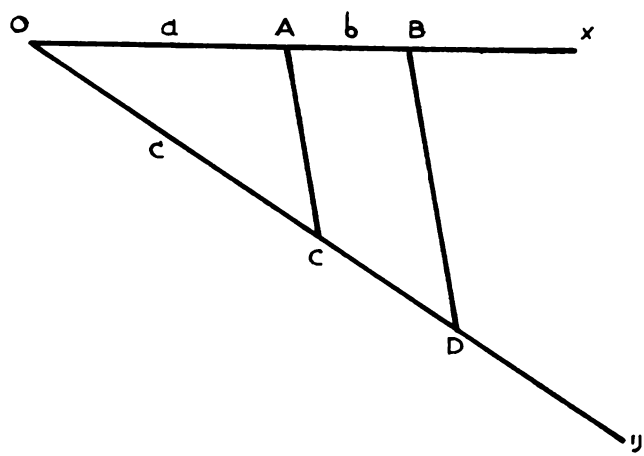

Fig. 16

Joignons AC et menons par B la parallèle à AC.

Cette droite coupe Oy en un point D.

Le théorème de Thalès appliqué au triangle OAC donne:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$$

ou: $\frac{a}{b} = \frac{c}{CD}$.

Il en résulte que: **CD = x .**
Le segment cherché est donc CD.

2°. Partage d'un segment en parties proportionnelles à des segments donnés.

Soit trois segments de longueurs a, b, c (fig. 17).

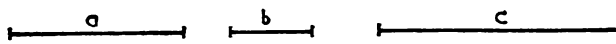

Fig. 17

Proposons-nous de partager un segment AB donné en segments de longueurs proportionnelles à a, b, et c.
Si x, y, z sont les longueurs des segments cherchés, on doit avoir:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} .$$

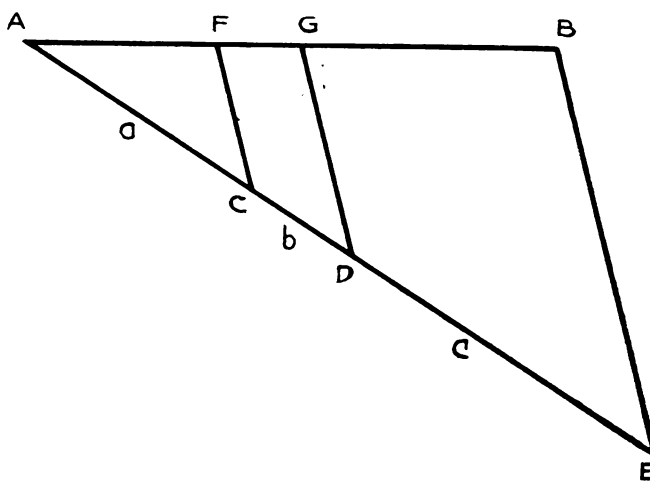

Fig. 18

Portons bout à bout sur une demi-droite issue du point A les longueurs AC = a, CD = b et DE = c (fig. 18).

Joignons EB et menons par C et D les parallèles EB.
Elles coupent AB respectivement en F et G.

D'après le théorème de Thalès, on a: $\frac{AF}{AC} = \frac{FG}{CD} = \frac{GB}{DE}$.

Les segments AF, FG et GB sont proportionnels aux segments de longueurs a, b, c.

3°. Points divisant un segment dans un rapport donné.

Soit le segment AB (fig. 20).
Construisons les points qui divisent intérieurement et extérieurement ce segment dans le rapport $\frac{m}{n}$.

Si m et n sont deux longueurs données, on porte sur une droite auxiliaire quelconque Ax: AC = m et CD = CE = n (fig. 19).

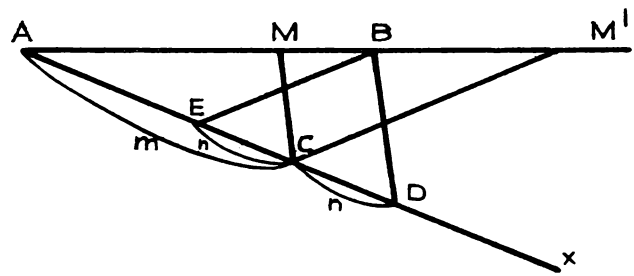

Fig. 19

Joignons BD et BE et menons par C les parallèles à BD et BE.
Ces parallèles coupent respectivement la droite AB en M et M'.
On a, d'après le théorème de Thalès:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CD}$$

ou:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}.$$

On a aussi:

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{CA}{CE}$$

ou:

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{m}{n}$$

Les points M et M' obtenus sont donc les points divisant AB dans le rapport $\frac{m}{n}$ *donné.*

Le rapport $\frac{m}{n}$ peut être un rapport numérique quelconque.

Soit à construire, par exemple, les points divisant le segment AB dans le rapport $\frac{3}{5}$.

On cherche ainsi les points tels que: $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{5}$.

Posons: $a = 3u$; $b = 5u$, u étant une longueur quelconque.

Il vient: $\frac{a}{b} = \frac{3u}{5u} = \frac{3}{5}$.

On est ainsi ramené à la construction des points divisant le segment AB dans le rapport $\frac{a}{b}$ (a et b étant des longueurs données).

RÉSUMÉ

Si des parallèles déterminent des segments égaux sur une première sécante, elles déterminent des segments correspondants égaux sur toute autre sécante.

Si on coupe des parallèles par deux droites, le rapport de deux segments quelconques déterminés sur l'une des sécantes est égal au rapport des segments correspondants déterminés sur l'autre sécante.

Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants proportionnels.

Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments correspondants proportionnels.

Toute parallèle aux bases d'un trapèze détermine les côtés non parallèles des segments correspondants proportionnels.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — Dans un triangle ABC, on mène une parallèle DE au côté BC.
Calculez AE et EC sachant que:

$$AD = 8{,}4\text{ cm};\ DB = 5{,}6\text{ cm};\ AC = 16\text{ cm}.$$

2. — Dans un trapèze de bases AB et CD, on donne:

$$AB = 21\text{ cm};\ BC = 32\text{ cm};\ CD = 50\text{ cm};\ AD = 25\text{ cm}.$$

Par le point M de AD tel que AM = 15 cm, on mène la parallèle aux bases qui coupe en N le côté BC et par N la parallèle à AD qui coupe CD en un point P.
Calculez CP et MN.

3. — Dans un triangle ABC, on donne:

$$AB = 6{,}3\text{ cm};\ AC = 4{,}5\text{ cm}.$$

Sur les prolongements de BA et de CA au delà de A, on porte respectivement AM = 2,1 cm et AN = 1,5 cm.
Calculez les rapports $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ et $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$.

Que pouvez-vous dire des droites BC et MN ?

4. — On considère trois demi-droites Ox, Oy et Oz issues d'un point O.
On prend sur Ox deux points A et A′ et on mène par A et A′ deux parallèles qui coupent Oy en B et B′ puis par B et B′ deux parallèles qui coupent Oz en C et C′.

a) Comparez les rapports $\frac{OA'}{OA}$, $\frac{OB'}{OB}$ et $\frac{OC'}{OC}$.

b) Montrez que les deux droites AC et A′C′ sont parallèles.

5. — Par le point D de la base BC d'un triangle isocèle ABC, on mène les parallèles aux côtés AB et AC, coupant respectivement AC et AB en M et N.
Montrez que $\frac{AM}{AN} = \frac{DB}{DC}$

6. — Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC.
On mène par le point G les parallèles aux côtés AB et AC qui coupent BC en D et E.

a) Évaluez les rapports $\frac{BD}{BC}$ et $\frac{EC}{BC}$.

b) Comparez les trois segments BD, DE et EC.

7. — Soit un parallèlogramme ABCD; par E pris sur le côté AB, on mène la parallèle à AC qui coupe BC en F, puis par F on mène la parallèle à BD qui coupe CD en G, et enfin par G on mène la parallèle à AC qui coupe DA en H.

a) Montrez que EH et BD sont parallèles.

b) Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ?

8. — Par le point d'intersection O des diagonales du quadrilatère ABCD, on mène les parallèles aux côtés BC et CD. Ces parallèles coupent respectivement AB et AD en E et F.

a) Comparez les rapports $\frac{AO}{AC}$, $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AF}{AD}$.

b) Montrez que EF et BD sont parallèles.

9. — Par le sommet A d'un parallélogramme ABCD, on mène une sécante coupant les droites BD, BC, CD respectivement en I, E et F.

a) Comparez les rapports $\frac{IA}{IE}$ et $\frac{ID}{IB}$.

b) Comparez les rapports $\frac{IE}{IA}$ et $\frac{IB}{ID}$.

c) Montrez que: $IA^2 = IE.IF$.

10. — Soit un triangle ABC. On prolonge BC de deux longueurs BD et CE égales à BC, puis on mène par D la parallèle à AB et par E la parallèle à AC.
Ces deux droites se coupent en F et FA coupe BC en M.

a) Comparez les rapports $\frac{MA}{AF}$ $\frac{MB}{BD}$ et $\frac{MC}{CE}$.

b) Quelle est la position du point M sur le segment BC ?

c) Calculez la valeur du rapport $\frac{MA}{MF}$ et dites ce que représente le point A pour le triangle DEF.

11. — a) Soit un triangle ABC. Construisez le point D de BC tel que $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{1}{2}$.

b) Les parallèles menées de D à AB et AC coupent AC en E et AB en F.
Évaluez les rapports $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$ et $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$.

c) Montrez que EF est parallèle à la médiane issue de B du triangle ABC.

12. — Dans un triangle ABC, on mène les hauteurs BD et CE, puis dans le triangle ADE les hauteurs DF et EG.

a) Comparez les rapports $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AG}{AD}$, puis les rapports $\frac{AD}{AC}$ et $\frac{AF}{AE}$.

b) Déduisez-en l'égalité: AB.AG = AC.AF.

c) Montrez que FG et BC sont parallèles.

13. — Soit un segment AB. Construisez les points C et D le divisant dans le rapport $\frac{3}{5}$.

14. — Soit un trapèze ABCD. Les côtés non parallèles AD et BC mesurent respectivement 8 cm et 6 cm.

a) Construisez le point M de AD tel que: $\overline{MA} = \frac{3}{7}\overline{MD}$.

b) On prend sur le prolongement de CB un point N tel que NB = 4,5 cm.
Comparez la direction de MN et celle des bases du trapèze.

15. — Dans un triangle ABC, on mène par le point A une demi-droite quelconque Ax.
Construisez par B et C deux parallèles coupant respectivement Ax en M et P de telle sorte que: $AM = \frac{2}{3} AP$.

16. — Partagez un segment AD en trois segments consécutifs AC, CB et BD proportionnels à 15 cm, 6 cm et 14 cm.

a) Comparez les rapports $\frac{CA}{CB}$ et $\frac{DA}{DB}$.

b) On suppose AD = 9,1 cm. Calculez les segments AC, CB et BD.

17. — Une parallèle au côté BC d'un triangle ABC coupe AB en D et AC en E. La parallèle menée par C à BE coupe AB en F.

a) Démontrez la relation $\overline{AB}^2 = \overline{AD}.\overline{AF}$.

b) Étant donné deux segments de longueurs a et b, construisez un segment de longueur x tel que $a^2 = bx$.

18. — On considère un quadrilatère ABCD inscriptible. Les droites AD et BC se coupent en M.
On construit sur MA le point E tel que ME = MC et sur MB le point F tel que MF = MD.

a) Comparez les directions de AB et de EF, puis les rapports $\frac{MA}{MB}$ et $\frac{ME}{MF}$.

b) Démontrez la relation: $\overline{MA}.\overline{MD} = \overline{MB}.\overline{MC}$.

19. — Une droite Δ coupe en I, J, et K respectivement les côtés BC, CA et AB du triangle ABC.
La parallèle menée par C à Δ coupe AB en D.

Évaluez en fonction des segments déterminés sur AB les rapports $\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}$ et $\frac{\overline{JA}}{\overline{JC}}$.

Déduisez-en la relation: $\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} . \frac{\overline{JC}}{\overline{JA}} . \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = 1$.

20. — Dans tout ce problème, BC désigne un segment de longueur 10 cm.

a) Construisez le point M divisant intérieurement le segment BC dans le rapport $\frac{3}{2}$.
Calculez les longueurs des segments MB et MC.

b) a désignant un nombre positif donné à l'avance, on voudrait construire un triangle ABC dans lequel la longueur des côtés BA et CA exprimée en centimètres soit respectivement 3a et 2a. Cette construction est-elle possible pour a = 1 ?
Dites comment il faut choisir a pour que l'on puisse obtenir A.

c) En supposant le triangle ABC construit de telle sorte que BA = 3a et que CA = 2a, on mène par le point C la parallèle à la droite AM coupant le prolongement de AB en D.

Évaluez AD en fonction de a. Comparez les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{MAC}$.

21. — Sur les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère ABCD, on place respectivement les points M, N, P, Q tels que:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AD}} = \frac{2}{5}.$$

a) Montrez que le quadrilatère MNPQ est un parallèlogramme.

b) Quelles particularités doit présenter le quadrilatère ABCD pour que MNPQ soit un rectangle ? un losange ? un carré ?

CHAPITRE III

TRIANGLES SEMBLABLES

(10e LEÇON)

13. Définition des triangles semblables.

Soit un triangle ABC et la parallèle à l'un de ses côtés (BC par exemple) coupant les côtés AB et AC (ou leurs prolongements) respectivement en D et E (fig. 20).

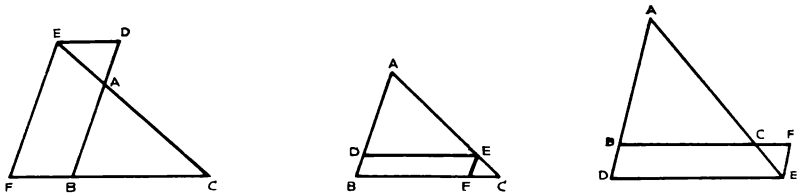

Fig. 20

Le théorème de Thalès appliqué au triangle ABC permet d'écrire (7e leçon):

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

Menons par E la parallèle à AB. Elle coupe BC en F.

Le théorème de Thalès permet encore d'écrire: $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$.

Le quadrilatère BFED étant un parallélogramme (ses côtés opposés sont parallèles deux à deux), on en déduit que: BF = DE.

Ainsi: $\frac{BF}{BC} = \frac{DE}{BC}$.

En comparant les proportions obtenues plus haut, il vient:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Les triangles ADE et ABC ont leurs côtés proportionnels.
Ils ont également:

$\hat{A}$ commun ou égaux comme opposés par le sommet,

$\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ (alternes internes ou correspondants),

$\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ (alternes internes ou correspondants).

Ainsi, les triangles ADE et ABC ont leurs côtés proportionnels et leurs angles respectivement égaux:

Ils sont **semblables.**

Les côtés proportionnels et les angles égaux sont dits **homologues.**

Remarquons que les côtés proportionnels sont les côtés opposés respectivement aux angles égaux et que, réciproquement, les angles égaux sont les angles opposés aux côtés proportionnels.

Le rapport de deux cotés homologues est le **rapport de similitude.**

Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs angles respectivement égaux et leurs côtés homologues proportionnels.

On vient de démontrer que:

Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine avec les supports des deux autres un nouveau triangle semblable au premier.

En particulier:

— Deux triangles égaux sont semblables: ils ont leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels.
Le rapport de similitude est égal à 1.

— Si deux triangles sont semblables, tout triangle égal à l'un d'eux est semblable à l'autre.

— Deux triangles semblables à un même troisième sont semblables entre eux.

(11e LEÇON)

14. Cas de similitude des triangles.

Il n'est pas nécessaire de démontrer chaque fois que les trois angles de deux triangles sont respectivement égaux et leurs côtés proportionnels pour affirmer que les deux triangles sont semblables.

Montrons, comme dans les cas d'égalité des triangles que, si certaines conditions sont remplies, on peut affirmer que les triangles sont semblables.

On obtient ainsi les **cas de similitude.**

15. Premier cas de similitude.

Soit deux triangles ABC et A'B'C' ayant: $\widehat{A} = \widehat{A'}$ *et* $\widehat{B} = \widehat{B'}$ *(fig. 21).*
Montrons qu'ils sont semblables.

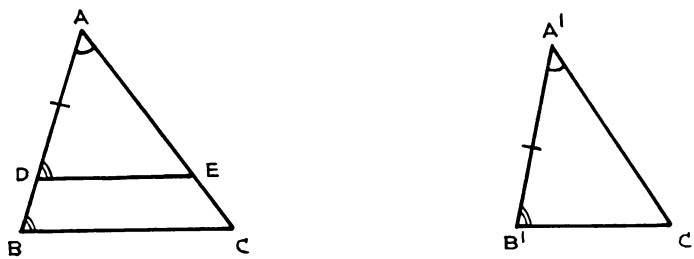

Fig. 21

Portons sur le côté AB du triangle ABC un segment AD égal à A'B' (fig. 21).
Menons par D la parallèle à BC; elle coupe AC en E.
Les triangles ADE et A'B'C' ont:

$\widehat{A} = \widehat{A'}$ (par hypothèse),

AD = A'B' (par construction),

$\widehat{D} = \widehat{B'}$ (tous les deux égaux à $\widehat{B}$).

Ils sont égaux.
Le triangle ADE est semblable au triangle ABC (10e leçon).
Il en résulte que le triangle A'B'C' égal au triangle ADE est semblable au triangle ABC.

Deux triangles qui ont deux angles respectivement égaux sont semblables.

En particulier:

Deux triangles rectangles qui ont deux angles aigus égaux sont semblables.

— Deux triangles isocèles qui ont les angles au sommet égaux sont semblables.

— Tous les triangles équilatéraux sont semblables.

(12° LEÇON)

16. Deuxième cas de similitude.

Soit deux triangles ABC et A'B'C' ayant: $\hat{A} = \hat{A'}$ *et* $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ *(fig. 22).*

Montrons qu'ils sont semblables.

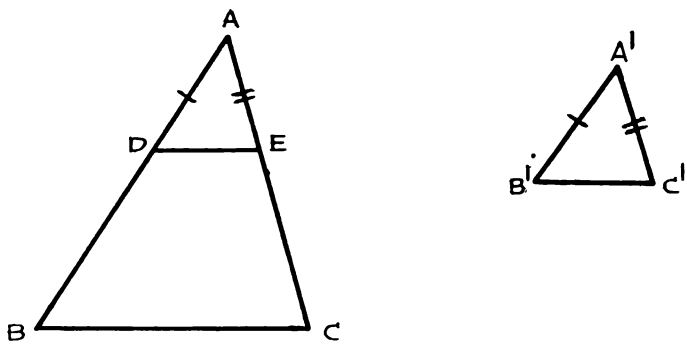

Fig. 22

Portons sur le côté AB du triangle ABC un segment AD = A'B' et, sur le côté AC, le segment AE = A'C'.

Les triangles ADE et A'B'C', ayant un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, sont égaux.

On a d'autre part, par hypothèse:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} .$$

Remplaçons dans cette proportion A'B' par AD et A'C' par AE.

Il vient:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} .$$

Il en résulte (7° leçon) que DE est parallèle à BC.

Le triangle ADE est semblable au triangle ABC.

Le triangle A'B'C' égal au triangle ADE est aussi semblable au triangle ABC.

Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux cotés proportionnels sont semblables.

En particulier:

— Deux triangles rectangles qui ont les côtés de l'angle droit respectivement proportionnels sont semblables.

17. Troisième cas de similitude.

Soit deux triangles ABC et A'B'C' tels que: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ *(fig. 23).*

Montrons qu'ils sont semblables.

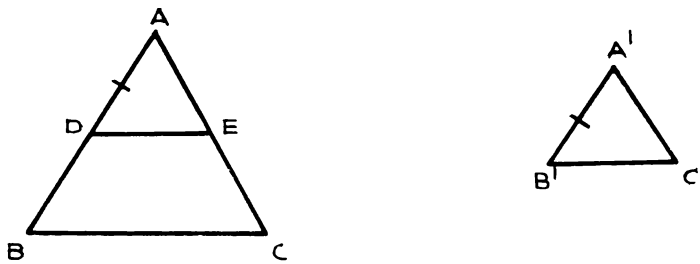

Fig. 23

Portons sur le côté AB un segment AD = A'B' et menons par D la parallèle DE à BC.

Le triangle ADE obtenu est semblable au triangle ABC.

On en déduit:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Comme AD = A'B', il vient:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Comparons ces rapports à ceux de l'hypothèse.

On obtient:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{A'C'}{AC} \quad \text{et} \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{DE}{BC}.$$

Il en résulte:

$$AE = A'C' \quad \text{et} \quad DE = B'C'.$$

Les deux triangles A'B'C' et ADE ayant leurs trois côtés respectivement égaux sont égaux.

Le triangle A'B'C', égal au triangle ADE semblable au triangle ABC, est lui-même semblable au triangle ABC.

Deux triangles qui ont leurs trois côtés proportionnels, sont semblables.

(13e LEÇON)

18. Cas spécial aux triangles rectangles.

Soit deux triangles rectangles ABC et A'B'C' tels que: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ *(fig. 24).*

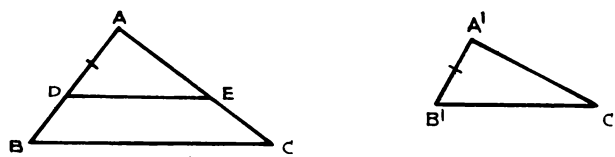

Fig. 24

Portons sur le côté AB les segments AD = A'B' et menons par D la parallèle DE à BC.

Le triangle ADE obtenu est semblable au triangle ABC.

On en déduit:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} .$$

Comme AD = A'B', il vient:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} .$$

Comparons ces rapports à ceux de l'hypothèse.

On obtient:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{B'C'}{BC} .$$

Il en résulte:

$$DE = B'C' .$$

Les deux triangles rectangles ADE et A'B'C' sont égaux.
Donc: les deux triangles A'B'C' et ABC sont semblables.

Deux triangles rectangles qui ont un côté de l'angle droit et l'hypoténuse proportionnels sont semblables.

(14e LEÇON)

19. Applications.

1°. *Divisions semblables portées par deux droites parallèles.*

Soit A, B, C, D et A', B', C', D' les intersections de deux parallèles Δ et Δ' avec des droites passant par un même point O (fig. 25).

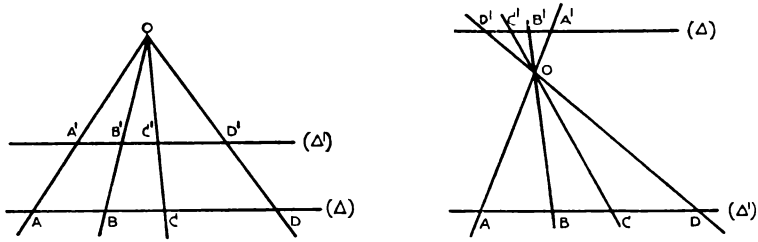

Fig. 25

Les triangles OAB et OA'B', sont semblables (10e leçon).
Il en résulte:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} .$$

Les triangles OBC et OB'C' sont aussi semblables.
On a:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} .$$

La similitude des triangles OCD et OC'D' entraîne:

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{OC'}{OC} .$$

En comparant les divers rapports obtenus, on conclut que

$$\boxed{\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}}$$

Des droites concourantes déterminent sur deux sécantes parallèles des segments homologues proportionnels.

On dit que les points A, B, C, D de Δ et A′, B′, C′, D′ de Δ' déterminent sur Δ et Δ' des **divisions semblables.**

On énonce encore le résultat obtenu plus haut:

Des droites concourantes déterminent sur deux sécantes parallèles des divisions semblables.

Orientons les droites Δ et Δ'.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens; il en est de même des vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$.

On en déduit:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}.$$

Réciproquement: soit trois droites AA′, BB′ et CC′ déterminant sur deux sécantes parallèles Δ et Δ' des segments homologues proportionnels: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$ (fig. 26).

Montrons que ces droites sont parallèles ou concourantes.

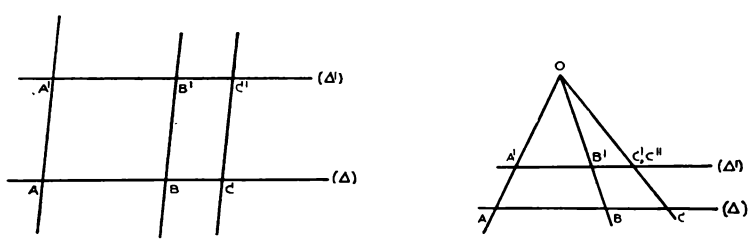

Fig. 26

Si $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1$, le quadrilatère ABB′A′ ayant deux côtés opposés AB, A′B′, égaux et parallèles, est un parallélogramme.

Les droites AA′ et BB′ sont alors parallèles; il en est de même des droites AA′ et CC′.

Supposons que le rapport $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ soit différent de 1.

Soit O le point de rencontre des droites AA′ et BB′ (fig. 26).

Joignons OC qui coupe Δ' en C″.

On a:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C''}}{\overline{BC}}$$

Comparons cette proportion avec celle de l'hypothèse. On en déduit:

$$\frac{\overline{B'C''}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} \quad \text{ou} \quad \overline{B'C''} = \overline{B'C'}$$

Les points C′ et C″ sont confondus.

La droite CC′ passe par O.

Trois droites déterminant sur deux sécantes parallèles des segments homologues proportionnels sont concourantes ou parallèles.

2°. *Construction des points divisant un segment dans un rapport donné.*

Soit à construire les points divisant un segment AB dans le rapport de deux longueurs données m et n.

Ce problème a été déjà résolu (9e leçon).

Remarquons qu'on peut encore effectuer cette construction de la manière suivante.

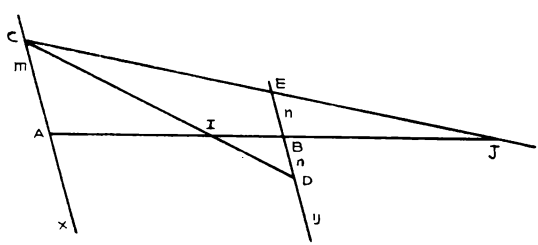

Fig. 27

Menons par A une droite Ax et par B la parallèle By à cette droite (fig. 27).

Portons sur Ax le segment AC = m et sur By, de part et d'autre de B, les segments

BD = BE = n.

Joignons CE et CD: ces droites coupent AB respectivement en I et J.

Les points cherchés sont les points I et J.

En effet, les deux triangles IAC et IBD sont semblables.

On en déduit:

$$\frac{IA}{IB} = \frac{AC}{BD} = \frac{m}{n}.$$

Il en est de même des triangles JAC et JBE.
Il en résulte:

$$\frac{JA}{JB} = \frac{AC}{BE} = \frac{m}{n}.$$

Soit à construire les points divisant un segment AB dans le rapport numérique: $\frac{a}{b}$.

Dans ce cas, si u est une longueur quelconque, on porte sur Ax une longueur $m = au$ et, sur By, de part et d'autre de B, des longueurs égales à bu.
On est ramené ainsi à la construction précédente.

RÉSUMÉ

Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs angles respectivement égaux et leurs côtés homologues proportionnels.

Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine avec les supports des deux autres un nouveau triangle semblable au premier.

Deux triangles qui ont deux angles respectivement égaux sont semblables.

Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels sont semblables.

Deux triangles qui ont leurs trois côtés proportionnels sont semblables.

Deux triangles rectangles qui ont un côté de l'angle droit et l'hypoténuse proportionnels, sont semblables.

Des droites concourantes déterminent sur deux sécantes parallèles des segments homologues proportionnels.

Des droites concourantes déterminent sur deux sécantes parallèles des divisions semblables.

Trois droites déterminant sur deux sécantes parallèles des segments homologues sont concourantes ou parallèles.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — Démontrez que: si deux triangles sont semblables, le rapport de deux hauteurs homologues est égal au rapport de similitude.

2. — Même question pour le rapport de deux bissectrices homologues et de deux médianes homologues.

3. — Démontrez que: si deux triangles sont semblables, le rapport de leurs périmètres est égal au rapport de similitude

4. — Démontrez que: si deux triangles sont semblables, le rapport de leurs aires est égal au carré du rapport de similitude.

5. — Démontrez que: le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit de la hauteur relative au troisième côté par le diamètre du cercle circonscrit au triangle.

6. — Soit un triangle isocèle OAB de base AB. Une sécante issue de O coupe la base AB (ou son prolongement) en D et le cercle circonscrit au triangle OAB en E.

a) Comparez les triangles OAE et ODA.

b) Démontrez la relation: $\overline{OA}^2 = \overline{OD}.\overline{OE}$.

7. — Dans un triangle ABC, les hauteurs AD, BE et CF se coupent en H.

a) Comparez les triangles AHE et BHD puis les triangles BHF et CHE.

b) Démontrez les relations: HA.HD = HB.HE = HC.HF.

8. — On donne un triangle ABC et on construit le cercle passant par B et tangent en A à AC, ainsi que le cercle passant par C et tangent en A à AB.
Ces deux cercles se coupant en A et I, prouvez que: $IA^2 = IB.IC$.

9. — Dans un triangle rectangle ABC, on mène une perpendiculaire en D à l'hypoténuse BC. Cette perpendiculaire coupe AC en E et AB en F.

a) Comparez les triangles BDF et EDC.

b) Montrez que BD.DC = DE.DF.

10. — Soit un triangle ABC (AB>AC) et la bissectrice intérieure AD de l'angle Â. Le cercle de centre B et de rayon BD recoupe cette bissectrice en E.

a) Comparez les triangles ABE et ACD.

b) Montrez que: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

11. — Soit un quadrilatère ABCD dont les diagonales AC et BD se coupent en O. La parallèle menée de A à BC coupe BD en E, la parallèle menée de B à AD coupe AC en F.

a) Montrez que OA.OB = OC.OE = OD.OF.

b) Montrez que EF et DC sont parallèles.

12. — On mène par un point M d'un demi-cercle O, de diamètre AB, une tangente qui coupe en C et D les perpendiculaires Ax et By à ce diamètre.

a) Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{COD}$?

b) Comparez les triangles OAC et ODB et démontrez la relation $OA^2 = AC.BD$.

13. — Soit O et O les centres des cercles circonscrits aux triangles semblables ABC et A'B'C'.

a) Comparez les triangles BOC et B'O'C'.

b) Montrez que le rapport $\frac{O'A'}{OA}$ est égal au rapport de similitude des deux triangles.

14. — Montrez que: dans un trapèze, la droite joignant les milieux des bases passe par le point de rencontre des côtés non parallèles et par le point de rencontre des diagonales.

15. — Soit un trapèze ABCD de bases AB et CD et soit un point M de BC tel que: $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CD}$ et un point N de AD tel que: $\frac{NA}{ND} = \frac{AB}{CD}$

Montrez que, si I est le point de concours des diagonales, M, I, N sont alignés.

16. — Deux cercles se coupent en A et A'. On mène par A' trois sécantes BC, DE et FG qui coupent le premier cercle en B, D et F et le second en C, E et G.

a) Comparez les triangles ABC et ADE. Montrez que: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$.

b) Comparez les triangles ABD et ACE.

c) Comparez les angles $\widehat{BDF}$ et $\widehat{CEG}$ puis les triangles BDF et CEG.

17. — On considère un triangle quelconque ABC. On désigne par H son orthocentre, O le centre du cercle circonscrit, G le point de concours des médianes, A' le milieu de BC et B' le milieu de AC.

a) Comparez les triangles ABH et A'B'O et montrez que: AH = 2OA'.

b) Comparez les triangles AHG et A'OG.

c) Montrez que les points H, G, O sont alignés.

d) Déterminez le rapport $\frac{GH}{GO}$.

18. — Une droite parallèle aux bases d'un trapèze ABCD coupe les côtés non parallèles AD et BC respectivement en M et N, et les diagonales AC et BD respectivement en P et Q.

a) Trouvez deux rapports égaux à $\frac{MP}{CD}$ et à $\frac{NQ}{CD}$.

Déduisez en une propriété des segments MP et NQ.

b) Que devient cette propriété si la droite MN passe par le point I, commun aux diagonales AC et BD ?

c) Soit K le point d'intersection des supports de AD et BC. La droite IK coupe AB en E et CD en F. Étudiez la position de E sur AB et celle de F sur CD.

19. — On donne un angle $\widehat{xOy}$ et deux demi-droites Ou et Ov symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{xOy}$ et intérieures à cet angle.

D'un point A de Ou, on mène les perpendiculaires AM et AN à Ox et Oy. D'un point A' de Ov, on mène les perpendiculaires A'M' et A'N' à Ox et Oy.

a) Démontrez que les triangles OA'N' et OAM sont semblables, de même que les triangles OA'M' et OAN.

b) Déduisez-en les égalités: AM.A'M' = AN.A'N' et OM.OM' = ON.ON'.

20. — Soit un cercle de centre O et une droite D extérieure à ce cercle.

Par un point A de la droite D, on mène les tangentes AB et AC au cercle O.

La perpendiculaire OE à la droite D coupe la corde BC en I et OA coupe BC en H.

a) Comparez les triangles OIH et OEA. Déduisez-en la relation: OI.OE = OH.OA.

b) Comparez les triangles OBH et OBA et montrez que: OB^2 = OH.OA.

c) Montrez que le point I reste fixe lorsque le point A se déplace sur la droite D.

21. — On donne trois points fixes alignés A, B, C (B entre A et C).
Deux points M et N variables décrivent la perpendiculaire (D) en C à AC de façon que AM et BN se coupent à angle droit.

a) Montrez que AN et BM sont perpendiculaires.

b) Démontrez que les triangles CAM et CNB sont semblables et que le produit $\overline{CM}.\overline{CN}$ reste constant quand M et N varient.
Déduisez-en que le cercle de diamètre MN passe par deux points fixes.

22. — Soit deux segments de droite BC et DE qui se coupent en A. On donne AB = 28 mm, AD = 21 mm, AC = 72 mm, AE = 96 mm, BD = 35 mm.

a) Montrez que les triangles ABD et AEC sont semblables. Calculez la longueur de CE.

b) Montrez que le quadrilatère BDCE est inscriptible.

c) On joint CD et EB qui se coupent en F. Montrez que les triangles ADC et ABE sont semblables.

d) Déduisez-en que les triangles DFE et BFC sont semblables. Quel est le rapport de similitude ?

23. — Soit A, M, B trois points alignés (M situé entre A et B). On donne AM = 4 cm, MB = 3 cm.

Un angle droit $\widehat{CMD}$ de sommet M coupe en C la perpendiculaire à AB en A et en D la perpendiculaire à AB en B.

a) Montrez que les triangles AMC, BMD sont semblables.

b) On donne en outre AC = 2 cm; précisez le rapport de similitude des triangles AMC et BDM.
Calculez BD, MC et MD. On désigne par N le point d'intersection de la droite CD avec la droite AB, calculez aussi AN et BN.

c) Montrez que le cercle de diamètre CD coupe la droite AB en deux points, dont on précisera les positions.

24. — Sur un cercle de centre O, de rayon 3 cm, on donne trois points fixes A, B et C. Un point M décrit l'arc ACB.

a) Démontrez que la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ passe par un point fixe D, milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

b) On appelle I le centre du cercle inscrit dans le triangle AMB et J celui du centre du cercle coinscrit dans l'angle $\hat{M}$.
Démontrez que le quadrilatère AIBJ est inscriptible dans un cercle de centre D.

c) Comparez les triangles MAI et MJB; déduisez-en: MA.MB = MI.MJ.

25. — On considère un triangle ABC dans lequel AB = 2AC.
On appelle D le point situé sur le prolongement de AC au delà de C, tel que AD = 2AB. On désigne par I le milieu de AD et l'on a ainsi: IA = ID = AB.

a) Établissez la relation: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}.\overline{AD}$.

b) Montrez que les deux triangles ABC et ADB sont semblables.

c) Montrez que AB est la tangente en B au cercle circonscrit au triangle BCD.

d) On mène les hauteurs BH et DK dans les triangles ABC et ADB.

Quelle est la valeur du rapport $\dfrac{AC.BH}{AB.DK}$?

26. — Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. On mène du même côté de A par rapport à BC, Bx parallèle à AC et Cy parallèle à AB.
Une droite passant par A coupe Bx en M et Cy en N.

a) Comparez les triangles ACN et MBA et montrez que: $BM.CN = a^2$.

b) BN et CM se coupent en P. Comparez les triangles BCM, CNB et PCB.

Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{BPC}$?

c) Montrez que: $CM.CP = BP.BN = a^2$.

27. — On considère un trapèze quelconque ABCD de bases AB = 30 cm, CD = 20 cm.
Les côtés non parallèles AD et BC se coupent en O. Les diagonales se coupent en I.

a) Évaluez le rapport $\frac{OH}{OK}$ des distances de O aux bases CD et AB.

b) Évaluez le rapport $\frac{IH'}{IK'}$ des distances du point I aux bases CD et AB.

c) La parallèle aux bases menée par I coupe AD en E.
Comparez les rapports $\frac{OD}{OA}$ et $\frac{ED}{EA}$ aux rapports précédents.

d) En supposant de plus AD = 15 cm, calculez OE.

28. — Un cercle de centre O a pour rayon R.
Sur une demi-droite fixe Ox, on porte les segments $OA = \frac{2R}{3}$ et $OB = \frac{3R}{2}$.
Soit CD un diamètre variable du cercle O. Les droites AC et BD se coupent en P et la parallèle à CD tracée par P coupe Ox en I. Soit K le point de rencontre avec CD de la parallèle à Ox tracée par P.

a) Démontrez que: $\frac{AI}{AO} = \frac{OK}{OC}$ et que: $\frac{BI}{BO} = \frac{OK}{OC}$

b) Calculez en fonction de R la longueur des segments AI, IB, OI et IP.

29. — Soit deux droites perpendiculaires x'Ox et y'Oy. On prend sur x'Ox, de part et d'autre de O, les points A et B tels que:

$$OA = 4\text{ cm};\quad OB = 2\text{ cm}.$$

On prend un point M sur la médiatrice de AB; MA coupe y'Oy en C et MB coupe y'Oy en D.
On appelle E le milieu de CA et F le milieu de DB.

a) Quelle est la nature des triangles MAB, BFO, OEA ?
Démontrez qu'ils sont semblables et donnez la valeur des rapports de similitude.

b) Démontrez que le quadrilatère EOFM est un parallèlogramme.

c) EF coupe Ox en P. Évaluez le rapport $\frac{PO}{PA}$. Calculez PO.

d) On prend un point M de façon que HM = 3 cm (H milieu de AB). Quelle est alors la nature du quadrilatère OFME ?

30. — Soit un triangle ABC, la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ coupe BC en I. On trace par C la parallèle à AI. Cette parallèle coupe AB en E.

a) Démontrez que l'on a:

$$AC = AE \text{ et } \frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}.$$

En posant BC = a, AB = c, AC = b, calculez IB et IC.

b) La droite AI coupe le cercle circonscrit en D. Démontrez la relation:

$$IB.IC = IA.ID$$

c) Démontrez que les triangles ABD et AIC sont semblables et que:

$$AB.AC = AD.AI.$$

Déduisez-en: $AB.AC = AI^2 + IB.IC$.

Calculez AI^2 en fonction de a, b, c.

CHAPITRE IV

RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

(15° LEÇON)

20. Projection orthogonale d'un point, d'un segment.

Soit une droite xy (fig. 28).

Menons par un point M la perpendiculaire à xy.

L'intersection M′ de cette perpendiculaire et de xy est la **projection orthogonale de M sur xy.**

La droite MM′ est la projetante du point M.

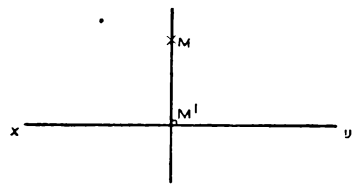

Fig. 28

Il est évident que tout point de xy est confondu avec sa projection orthogonale. Si on se donne la projection orthogonale M′ de M, le point M peut être choisi arbitrairement sur la perpendiculaire à xy en M′.

Soit un segment AB et une droite xy (fig. 29).

La projection orthogonale du segment AB sur la droite xy est le segment A′B′ dont les extrémités sont les projections respectives sur xy des points A et B.

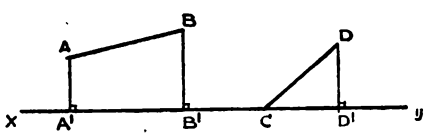

Fig. 29

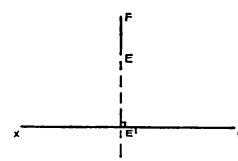

Fig. 30

REMARQUES

1°. Nous sous-entendrons souvent le mot «orthogonale» dans toute la suite: nous dirons que M′ est la projection du point M et A′B′ la projection du segment AB.

2°. Soit un segment CD dont l'une des extrémités, C par exemple, est sur xy (fig. 29).

La projection du segment CD sur xy est le segment CD′.

3°. Soit un segment EF dont le support est perpendiculaire à xy (fig. 30). La projection du segment EF sur xy est le point E′, intersection de la droite EF et de xy.

(16e LEÇON)

21. Relations métriques dans le triangle rectangle.

Soit un triangle rectangle ABC et AH la hauteur relative à l'hypoténuse BC (fig. 31).

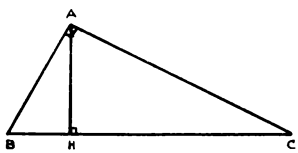

Fig. 31

Les deux triangles rectangles ABH et ABC ayant l'angle aigu $\hat{B}$ commun sont semblables.

Il en résulte:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

1°. On déduit de l'égalité des deux premiers rapports:

$$\boxed{AB^2 = BC.BH}$$

2°. La similitude des triangles rectangles ACH et ABC donne:

$$\boxed{AC^2 = BC.CH}$$

Notons que BH et CH sont respectivement les projections des côtés AB et AC sur l'hypoténuse BC.

Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse.

3°. Ajoutons membre à membre les deux relations obtenues.

Il vient:

$$AB^2 + AC^2 = BC.BH + BC.CH = BC(BH + CH).$$

ou:

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2}$$

Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Ce théorème est connu sous le nom de «théorème de Pythagore» (Pythagore: mathématicien grec, VI° siècle avant J.C.).

4° Il résulte de l'égalité $\frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC}$ trouvée plus haut:

$$\boxed{AB \times AC = BC \times AH}$$

Dans tout triangle rectangle, le produit des côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur relative à l'hypoténuse.

5°. Les deux triangles rectangles ABH et AHC semblables au triangle ABC sont semblables (10° leçon).

Nous en déduisons:

$$\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} = \frac{AB}{AC}.$$

Il résulte de l'égalité des deux premiers rapports:

$$\boxed{HA^2 = HB.HC}$$

Dans tout triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Toutes les relations que nous venons de trouver, faisant intervenir des longueurs de segments, sont appelées *RELATIONS MÉTRIQUES.*

6°. Il est possible d'en déduire d'autres relations.

Soit: $AB^2 = BC.BH$.
$AC^2 = BC.CH$.

Divisons ces deux relations membre à membre:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC.BH}{BC.CH}$$

ou:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH}$$

Le rapport des carrés des côtés de l'angle droit est égal au rapport de leurs projections sur l'hypoténuse.

Soit: $AB.AC = BC.AH$.

Élevons au carré les deux membres de cette relation:

$$AB^2.AC^2 = BC^2.AH^2 .$$

Or, le théorème de Pythagore donne:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 .$$

Il vient:

$$AB^2.AC^2 = (AB^2 + AC^2)\, AH^2 .$$

Ou:

$$AB^2.AC^2 = AB^2.AH^2 + AC^2.AH^2 .$$

Il résulte de la division des deux membres de cette égalité par $AH^2.AB^2.AC^2$:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

L'inverse du carré de la hauteur est égal à la somme des inverses des carrés des côtés de l'angle droit.

(17e LEÇON)

22. Réciproque du théorème de Pythagore.

Soit un triangle ABC (fig. 32) dans lequel on a, entre ses trois côtés, la relation: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

BC est le plus grand des trois côtés.

Nous nous proposons de montrer que le triangle ABC est rectangle.

Construisons un triangle A'B'C' rectangle en A' tel que: A'B' = AB et A'C' = AC. (fig. 33).

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle A'B'C' donne:

$$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$$

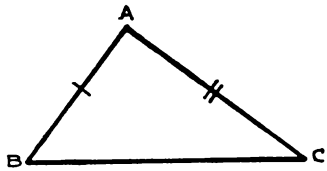

Fig. 32

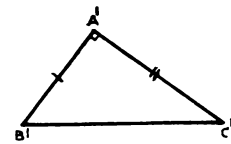

Fig. 33

Comparons cette relation avec celle de l'hypothèse.

On en déduit:

$$B'C' = BC.$$

Les deux triangles ABC et A'B'C' ayant leurs trois côtés respectivement égaux sont égaux (troisième cas d'égalité des triangles quelconques).

Le triangle ABC est, par suite, rectangle en A.

Si, dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, ce triangle est rectangle.

23. Applications.

Les diverses relations métriques, établies précédemment, sont très souvent utilisées pour calculer des longueurs de segments dans certaines figures.

1°. *Diagonale d'un rectangle.*

Soit un rectangle ABCD de côtés: AB = a et BC = b (fig. 34).

Dans le triangle rectangle ABC, on a:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 .$$

Soit: $AC^2 = a^2 + b^2$

Donc:

$$\boxed{AC = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

2°. *Diagonale d'un carré.*

Soit un carré ABCD de côté a (fig. 35).

On peut écrire: $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2}$.

Ou:

$$\boxed{AC = a\sqrt{2}}$$

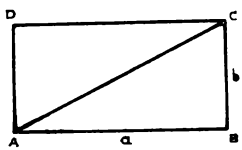

Fig. 34

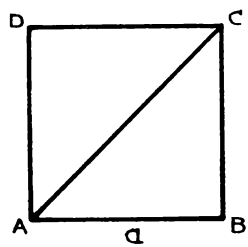

Fig. 35

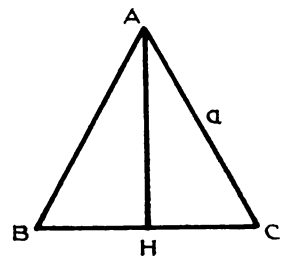

Fig. 36

3°. *Hauteur d'un triangle équilatéral.*

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et AH la hauteur issue de A (fig. 36).

Dans le triangle rectangle ABH, on a:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

ou: $AH^2 = AB^2 - BH^2$.

or: $AB = a$ et $BH = \frac{a}{2}$

Il en résulte:

$$AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} .$$

D'où:

$$AH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} .$$

Soit:

$$\boxed{AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

RÉSUMÉ

Triangle ABC rectangle en A $\Rightarrow$

$$\begin{cases} AB^2 = BC.BH \\ AB.AC = BC.AH \\ AH^2 = HB.HC \\ \dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{BH}{CH} ; \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \end{cases}$$

Triangle ABC rectangle en A $\Leftrightarrow$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — Dans un triangle ABC rectangle en A, on a: AB = 3 cm et AC = 4 cm. Calculez BC, AH, BH, CH (H étant le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse).

2. — Dans un triangle ABC rectangle en A, on trace la hauteur AH. Sachant que AH = 2 cm et BH = 2,5 cm, calculez les côtés du triangle.

3. — Dans un triangle ABC, rectangle en A et de hauteur AH, on donne:

BH = 72 cm, CH = 12,5 cm.

Calculez BC, AH, AB et AC.

4. — Dans un triangle ABC, rectangle en A et de hauteur AH, on donne:

BC = 36 cm, BH = 4 cm.

Calculez CH, AB, AC et AH.

5. — On donne un cercle de 8 cm de rayon.

a) Calculez la longueur d'une corde située à une distance de 5 cm du centre.

b) Calculez la distance au centre d'une corde de 6 cm de longueur.

6. — Soit un cercle de diamètre AB = 35 cm. Une corde PQ perpendiculaire en H à AB est située à une distance du centre égale à 4,9 cm.
Calculez les segments AP, BP et PH.

7. — Dans un trapèze isocèle, les bases mesurent 22 cm et 16 cm et la hauteur 4 cm.
Calculez la longueur des côtés non parallèles.

8. — Dans un trapèze rectangle ABCD, on donne: AB = 2 cm, $\widehat{ABD} = 60°$ et $\widehat{CBD} = 90°$.
Calculez les côtés et les diagonales du trapèze.

9. — Dans un trapèze ABCD, les angles $\hat{A}$ et $\hat{D}$ sont droits.
On connaît AB = 12 cm, AD = 5 cm et DC = 4 cm.

a) Calculez DB, AC et CB.

b) Soit I le point de rencontre de CB avec AD; calculez ID et IA.

10. — Un triangle isocèle ABC de sommet A a pour périmètre 32 cm et pour base 8 cm.
Calculez sa hauteur.

11. — Soit un cercle O de diamètre AB = 2R. On mène les tangentes en A et B; la tangente en un point M du cercle les coupe respectivement en C et D.

a) Démontrez que le triangle COD est rectangle.

b) Démontrez la relation: $\overline{AC}.\overline{BD} = R^2$.

12. — On considère un segment BC = 2a et, du même côté de BC, les perpendiculaires Bx et Cy à BC.
On porte sur Bx un point A tel que AB = a. On joint AC et on mène par B la perpendiculaire à AC qui coupe AC en H et Cy en D.
Calculez en fonction de a les segments AC, AH, HC, BH, BD, HD, CD et AD.

13. — Soit un triangle ABC dont les côtés BC, CA et AB mesurent respectivement 5, 4 et 3 cm.

a) Montrez que ce triangle est rectangle en A.

b) Calculez les longueurs des segments déterminés sur les côtés par les points de contact du cercle inscrit au triangle.

c) Calculez le rayon du cercle inscrit et celui du cercle exinscrit dans l'angle Â.

14. — On considère un demi-cercle de centre O et de diamètre AB puis un demi-cercle de diamètre OA.
La perpendiculaire à AB au point C du segment OA coupe le demi-cercle de diamètre AB en D et le demi-cercle de diamètre OA en E.
Montrez que: $AD^2 = 2AE^2$.

15. — On donne un cercle de rayon R et un point P intérieur.
On mène par P deux cordes AB et CD perpendiculaires, puis la corde DE parallèle à AB.

a) Comparez BD et AE et évaluez l'angle $\widehat{CAE}$.

b) Calculez en fonction de R la somme: $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$.

16. — Soit un carré ABCD de côté 3a. On marque sur le côté AD le point E tel que AE = a et sur DC le point F tel que DF = a.
On trace AF et BE qui se coupent en H.

a) Démontrez que AF est perpendiculaire à BE.

b) Calculez les côtés du quadrilatère ABFE et ses diagonales en fonction de a.

c) Calculez HE, HA, HB et HF en fonction de a.

17. — Dans un cercle de rayon R, on considère deux cordes AB et CD parallèles situées d'un même côté du centre O aux distances $\frac{3R}{5}$ et $\frac{4R}{5}$.
Calculez les longueurs des cordes et les angles du trapèze qu'elles déterminent.

18. — Soit un triangle ABC dans lequel: $\hat{B} - \hat{C} = 90°$.

a) Démontrez que le diamètre AA' = 2R du cercle circonscrit est parallèle à BC.

b) Démontrez la relation: $AB^2 + AC^2 = 4R^2$.

c) Soit AH la hauteur issue de A. Démontrez que: $\overline{AH}^2 = \overline{HB}.\overline{HC}$.

19. — Soit un triangle ABC et AH la hauteur issue de A.

a) On suppose que l'on a: $\overline{AH}^2 = -\overline{HB}.\overline{HC}$. Le triangle est-il rectangle ?

b) On suppose que l'on a: $\overline{AH}^2 = \overline{HB}.\overline{HC}$. Démontrez que l'un des angles B ou C est obtus.

Comparez les triangles AHB et AHC. Déduisez-en que la différence des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ vaut 90°.

20. — Soit un triangle ABC rectangle en A et H la projection de A sur BC.

a) Démontrez la relation: $\overline{AB}^2 = \overline{BH}.\overline{BC}$.

b) Réciproquement, on projette le sommet A d'un triangle ABC en H sur le côté opposé et on suppose: $\overline{AB}^2 = \overline{BH}.\overline{BC}$.

Montrez que le triangle ABC est rectangle en A.

21. — On donne un cercle O de diamètre AB = 2 cm et on joint le point A à un point quelconque M, variable sur le cercle et on prolonge AM d'une longueur MP = 2AM.

a) La perpendiculaire en P à AP rencontre la droite AB en H. Montrez que PH est parallèle à MB.

Calculez BH. Montrez que H reste fixe lorsque M décrit le cercle donné.

b) Montrez que la courbe décrite par le point P lorsque M décrit le cercle est un cercle.

c) On suppose maintenant que MB = 1 cm. Calculez PH.

Si P' est la projection de P sur BH, calculez P'H et PP'.

22. — Soit M le milieu du côté BC d'un triangle ABC. On suppose que les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux.

a) Montrez que les triangles ABM et CBA sont semblables.

b) Établissez la relation: $\overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$. Comparez BC à la diagonale d'un carré de côté AB.

c) Quelle est la position relative de la droite BA et du cercle passant par les points A, M, C ?

La parallèle à MA issue de C coupe la droite AB en D. Quelle remarque pouvez-vous faire sur le cercle passant par les points A, D, C ?

23. — Soit AB un triangle rectangle tel que les côtés de l'angle droit aient pour longueurs: AB = 4 cm, AC = 3 cm.

On joint les milieux A', C', B' des côtés BC, AB, AC.

a) Comparez les triangles ABC et A'B'C'.

b) Calculez BC et déduisez-en la longueur de B'C'. Calculez ensuite la hauteur A'P de A'B'C' et la hauteur AQ de AB'C'.

Étudiez le quadrilatère A'PAQ. Calculez ses dimensions.

24. — Sur un segment AB de longueur a, on prend un point C tel que $AC = \frac{a}{3}$

On décrit un demi-cercle, de centre O, ayant AB pour diamètre. Au point C, on élève la perpendiculaire à AB qui coupe le demi-cercle précédent en D.

On mène de O la perpendiculaire OH à la corde AD.

a) Calculez, en fonction de a, les longueurs CD, AD, BD et OH.

b) Montrez que le quadrilatère CODH est inscriptible.

c) Le cercle de diamètre CD recoupe AD en E et BD en F. Nature du quadrilatère CEFD. Calculez les longueurs DE et DF.

25. — On donne un demi-cercle de centre O et de diamètre AB = 2R et la tangente Ax au point A. D'un point P quelconque, pris sur Ax, mais tel que PA$>$R, on mène la deuxième tangente au cercle, soit PM.

a) Démontrez que PO est bissectrice de l'angle $\widehat{AOM}$ et que BM est parallèle à OP.

b) D'un point O, on mène la perpendiculaire à AB, qui coupe en N le prolongement de BM. Démontrez que le quadrilatère OBNP est un parallélogramme et que le quadrilatère OMNP est un trapèze isocèle.

c) On donne: $AP = \frac{4R}{3}$. Calculez en fonction de R les segments BN, AM, BM.

26. — On donne un demi-cercle de centre O et de diamètre AB = 2R. C étant un point quelconque de ce demi-cercle, on trace la corde AC, que l'on prolonge au delà de C d'une longueur CD = CB.

a) Lorsque C décrit le demi-cercle de centre O, montrez que le point D se déplace sur un cercle, dont on précisera le centre I et le rayon.

b) Quelle portion du cercle de centre I décrit le point D lorsque C décrit le demi-cercle de diamètre AB ?

c) Le point C est choisi tel que les corde AC ait la valeur $\frac{3R}{2}$ $(AC = \frac{3R}{2})$.

Soit H la projection du point C sur AB. Calculez en fonction de R les longueurs des segments AH, HB, CB, CH et BD.

27. — On considère un triangle ABC, rectangle en A, et tel que: BC = 8 cm et $\hat{B} = 30°$.

On prolonge BA au delà de A de la longueur $AD = \frac{AB}{2}$. La parallèle menée de D à BC coupe la droite AC en E Les droites BE et CD se coupent en I.

a) Calculez les longueurs AC, AB et CD. Montrez que les triangles ABC et ADE sont semblables et calculez les segments AE, ED et BE.

b) Montrez que $\frac{ID}{IC} = \frac{1}{2}$ et que BD est médiane du triangle IBC.

Que représente le point A pour le triangle IBC ?

La droite IA coupe BC et DE en M et N. Que pouvez-vous dire sur les points M et N ?

28. — Construisez un triangle ABC tel que: AB = 8 cm, $\widehat{ABC} = 60°$, $\widehat{BAC} = 75°$. Tracez la hauteur AH.

a) Calculez BH, AH, HC, BC et AC.

b) Soit un point M variable du segment BC. La perpendiculaire menée de M à AB coupe AB en P; la perpendiculaire menée de M à AC coupe AC en Q.

Montrez que les cinq points A, P, H, M, Q sont sur un même cercle.

Précisez le centre de ce cercle. Quand M décrit le segment BC, sur quelle ligne fixe se déplace ce centre ?

c) Quand M varie, le triangle MPQ varie. Montrez qu'il reste semblable à lui-même.

29. — On porte sur une droite deux segments consécutifs AB = 5 cm, BC = 12 cm, puis on élève d'un même côté de AC les perpendiculaires à cette droite, sur lesquelles on porte: AP = 4 cm; CM = 15 cm. On joint BM et BP.

a) Comparez les rapports $\frac{AP}{AB}$ et $\frac{CB}{CM}$. Établissez la similitude des triangles BAP et MCB.

b) Démontrez que le triangle PBM est rectangle et calculez ses côtés.

c) Soit H la projection de B sur MP. Que pensez-vous des quadrilatères PABH et BCMH ?

d) Démontrez que le triangle AHC est rectangle.

CHAPITRE V

RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE CERCLE

(18° LEÇON)

24. Propriété des segments déterminés par un cercle sur deux sécantes non parallèles.

Soit un cercle et deux sécantes AB et CD se coupant en un point M (fig. 37 et 38).

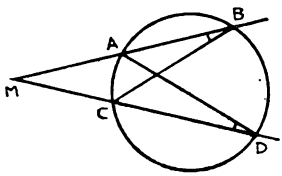

Fig. 37

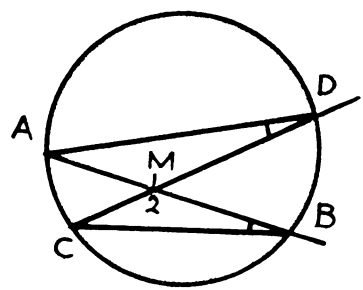

Fig. 38

1°. Les triangles MAD et MBC de la figure 37 ont:

$\hat{M}$ commun,

$\hat{B} = \hat{D}$ (angles inscrits interceptant le même arc).

Ils sont semblables (1er cas de similitude).
On en déduit:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

Il en résulte: $MA.MB = MC.MD$.

2°. Les triangles MAD et MBC de la figure 38 ont:

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (opposés par le sommet)

$\hat{B} = \hat{D}$ (angles inscrits interceptant le même arc).

Ils sont semblables (1er cas de similitude) .
On en déduit:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

Ou:

$$MA.MB = MC.MD .$$

Si M est extérieur au cercle (fig. 37), les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont de même sens.

Le produit $\overline{MA}.\overline{MB}$ est positif et il en est de même du produit $\overline{MC}.\overline{MD}$.

Si M est intérieur au cercle (fig. 38), les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont de sens contraires.

Le produit $\overline{MA}.\overline{MB}$ est négatif et il en est de même du produit $\overline{MC}.\overline{MD}$.

Ainsi, ces deux produits $\overline{MA}.\overline{MB}$ et $\overline{MC}.\overline{MD}$ ayant même valeur absolue et, chaque fois, même signe sont égaux.

$$\boxed{\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}}$$

Si, d'un point M, on mène deux sécantes MAB et MCD à un cercle, on a la relation:

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD} .$$

Réciproquement, soit deux droites AB et CD concourantes en un point M (fig. 39).

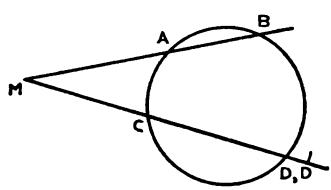

Fig. 39

Supposons que l'on ait:

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD} .$$

Construisons le cercle passant par les trois points A, B, C.

Il recoupe MCD au point D'.

On a: $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD'}$.

Comparons cette relation avec celle de l'hypothèse. Il en résulte:

$$\overline{MD} = \overline{MD'} .$$

Les deux points D et D' sont confondus.

Les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle: on dit qu'ils sont **cocycliques.**

Si, sur deux droites qui se coupent en un point M, on a des points A et B sur l'une, C et D sur l'autre tels que: $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$, les quatre points A, B, C, D sont cocycliques.

(19e LEÇON)

25. Propriété des segments déterminés par un cercle sur une tangente et une sécante issues d'un même point.

Soit un cercle, une tangente MT et une sécante MAB issues d'un point M extérieur à ce cercle (fig. 40).

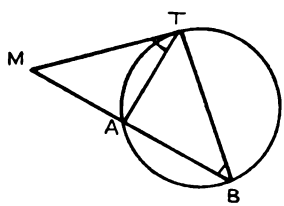

Fig. 40

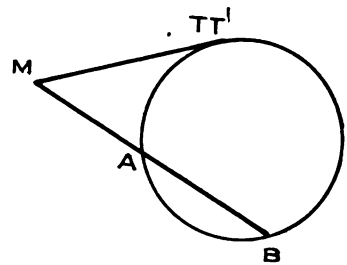

Fig. 41

Les deux triangles MTA et MTB ont:

$\hat{M}$ commun,

$\widehat{MTA} = \widehat{TBA}$ (angles inscrits interceptant le même arc).

Ils sont semblables (1er cas de similitude).
On en déduit:

$$\frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT}.$$

Ou: $MT^2 = MA.MB$

Le produit $\overline{MA}.\overline{MB}$ est positif puisque M est extérieur au cercle donné.

On a donc:

$$\boxed{\overline{MT}^2 = \overline{MA}.\overline{MB}}$$

Si, d'un point M extérieur à un cercle, on mène à ce cercle une tangente MT et une sécante MAB, on a la relation:

$$\overline{MT}^2 = \overline{MA}.\overline{MB} .$$

Réciproquement: soit deux droites se coupant en un point M, un point T sur l'une et deux points A et B sur l'autre tels que: $MT^2 = \overline{MA}.\overline{MB}$ (fig. 41).

Construisons le cercle passant par les trois points A, B, T.

Supposons qu'il recoupe MT au point T′.

On a: $\overline{MT}.\overline{MT'} = \overline{MA}.\overline{MB}$.

Comparons cette relation avec celle de l'hypothèse.

Il en résulte: $\overline{MT} = \overline{MT'}$.

Les points T et T′ sont confondus.

Le cercle est tangent en T à MT.

Si, sur deux droites qui se coupent en un point M, on a un point T sur l'une, deux points A et B sur l'autre tels que: $\overline{MT}^2 = \overline{MA}.\overline{MB}$, la droite MT est tangente au cercle passant par les points A, B, T.

(20e LEÇON)

26. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Nous avons vu plus haut qu'étant donnés un cercle et deux sécantes MAB et MCD on a: $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$.

Si, la sécante MAB étant fixe, on fait pivoter l'autre sécante autour de M, le produit $\overline{MC}.\overline{MD}$, toujours égal à $\overline{MA}.\overline{MB}$, demeure constant.

La valeur constante de ce produit s'appelle la **puissance du point M par rapport au cercle.**

Cette puissance est positive si M est extérieur au cercle; elle est négative si M est intérieur au cercle, nulle si M est sur le cercle.

Dans le cas où M est extérieur au cercle, cette puissance est égale à MT^2, T désignant le point de contact d'une tangente menée de M au cercle.

27. Calcul de la puissance d'un point par rapport à un cercle.

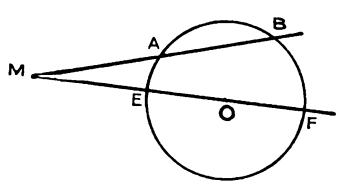

Fig. 42

Soit un cercle de centre O et de rayon R, et un point M situé à la distance *d* de O (fig. 42).

Nous nous proposons d'évaluer la puissance du point M par rapport au cercle O en fonction de *d* et de R.

Si MAB est une sécante passant par

M, nous savons que cette puissance est égale à $\overline{MA}.\overline{MB}$.

Considérons la sécante MO coupant le cercle en E et F.

On a: $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{ME}.\overline{MF}$.

Orientons MEF dans un sens quelconque.

La relation de Chasles nous permet d'écrire:

$$\overline{ME} = \overline{MO} + \overline{OE}.$$
$$\overline{MF} = \overline{MO} + \overline{OF}.$$

D'où: $\overline{ME}.\overline{MF} = (\overline{MO} + \overline{OE})(\overline{MO} + \overline{OF}) = (\overline{MO} + \overline{OE})(\overline{MO} - \overline{OE})$.

Ou encore: $\overline{ME}.\overline{MF} = MO^2 - OE^2 = d^2 - R^2$.

On note: $\boxed{\mathcal{P}M/(O) = d^2 - R^2}$.

Ou lit:

La puissance par rapport à un cercle de centre O et de rayon R d'un point M situé à la distance d du centre est égale à: $d^2 - R^2$.

Remarquons que:

— $\mathcal{P}M/(O) > O \Leftrightarrow$ M extérieur au cercle O $(d > R)$

— $\mathcal{P}M/(O) < O \Leftrightarrow$ M intérieur au cercle $(d < R)$

— $\mathcal{P}M/(O) = O \Leftrightarrow M \in$ cercle $(d = R)$

RÉSUMÉ

Si, d'un point M, on mène deux sécantes MAB et MCD à un cercle, on a la relation:

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}.$$

Si, sur deux droites qui se coupent en un point M, on a des points A et B sur l'une, C et D sur l'autre tels que $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$, les quatre points A, B, C, D sont cocycliques.

Si, d'un point M extérieur à un cercle, on mène à ce cercle une tangente MT et une sécante MAB, on a la relation:

$$\overline{MT}^2 = \overline{MA}.\overline{MB}.$$

Si, sur deux droites qui se coupent en un point M, on a un point T sur l'une, deux points A et B sur l'autre tels que: $\overline{MT}^2 = \overline{MA}.\overline{MB}$, la droite MT est tangente au cercle passant par les points A, B, T.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — Soit un cercle (C) de centre O et de rayon R = 5,2 cm et un point P tel que: OP = 7 cm.
Quelle est la puissance du point P par rapport au cercle ?
Quelle est la longueur de la tangente issue de P ?

2. — Soit un cercle (C) de centre O et de rayon R = 4,6 cm et un point P tel que: OP = 7,8 cm. Une sécante issue de P coupe le cercle en A et B.
Sachant que PA = 3,2 cm, calculez PB.
Quelle est la distance de la corde AB au centre du cercle ?

3. — Soit un cercle O, de rayon R et un point P intérieur au cercle. Deux sécantes issues de P coupent le cercle, la première en A et B, la seconde en C et D.
a) On donne: PA = 9 cm; PB = 12 cm; PC = 6 cm. Calculez PD.
b) Sachant que: R = 15 cm, calculez la distance OP.
c) Calculez la distance des cordes AB et CD au centre du cercle.

4. — Sur les côtés Ox et Oy d'un angle $\widehat{xOy}$, on marque les points A et B tels que: OA = 4 cm; OB = 9 cm; sur Oy, les points C et D tels que: OC = 3 cm, OD = 12 cm. Prouvez que les points A, B, C, D sont cocycliques.

5. — Sur le côté Ox d'un angle xOy, on prend un point A tel que OA = 12 cm; sur le côté Oy, on prend les points B et C tels que: OB = 9 cm, OC = 16 cm.
Prouvez que le cercle passant par A, B, C est tangent à Ox.

6. — Soit un segment AC et B un point de ce segment. On fait passer, par B et C, un cercle variable de centre O.
a) Quelle courbe décrivent les points de contact T et T' des tangentes AT et AT' ?
b) Soit M le point diamétralement opposé à B et P le point où AM recoupe le cercle O. Montrez que: $\overline{AM}.\overline{AP} = OA^2 - OC^2$.

7. — Soit deux cercles O et O' dont A et B sont les points communs.
a) D'un point C de la droite AB, on mène les tangentes CM et CM' aux deux cercles. Comparez CM et CM'.
b) Une sécante passant par C coupe le cercle O en P et Q. Une seconde sécante passant par C coupe le cercle O' en P' et Q'.
Démontrez que les points P, Q, P', Q' sont cocycliques.
c) Démontrez que la droite AB coupe la tangente commune aux deux cercles en son milieu.

8. — Soit un triangle ABC et ses hauteurs AA', BB', CC' qui se coupent en H.
a) Démontrez que les quatre points A, B, A', B' sont sur un même cercle et déduisez-en les relations:

$$\overline{CA}.\overline{CB'} = \overline{CB}.\overline{CA'}$$
$$\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HC}.\overline{HC'}.$$

b) Démontrez que les triangles BHA' et ACA' sont semblables et établissez la relation: $\overline{A'H}.\overline{A'A} = -\overline{A'B}.\overline{A'C}$.

9. — On considère un cercle (C) de centre O et de rayon R et un point P extérieur tel que OP = d. Une droite passant par P coupe (C) en A et B.
Les tangentes en A et B au cercle (C) se coupent en Q qui se projette en H sur OP.

a) Montrez que les points A, B, O, H, Q sont cocycliques.

b) Déduisez de ce qui précède que: $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PH}.\overline{PO}$.
Calculez PH en fonction de R et d. Montrez que H est fixe lorsque la sécante PAB pivote autour du point P.

c) QH coupe PAB en C. I étant le milieu de AM, montrez que:

$$\overline{PC}.\overline{PI} = \overline{PA}.\overline{PB}.$$

d) Montrez que $\overline{IC}.\overline{IP} = \overline{IA}^2$.

10. —Soit un segment AB = 12 cm et, sur le prolongement de AB, un point S tel que SB = 4 cm.

a) On considère les cercles qui passent par A et B. Démontrez que les points de contact des tangentes menées de S à ces cercles décrivent un cercle dont on calculera le rayon.

b) On considère le cercle qui a pour diamètre AB. Soit O son centre, T le point de contact d'une des tangentes menée de S, M le pied de la perpendiculaire abaissée de T sur AB. Calculez OM, TM, BM.

c) Évaluez les rapports $\frac{BM}{BS}$ et $\frac{TM}{TS}$.

11. — On considère un cercle de diamètre AB et la corde PP′ perpendiculaire à AB en un point C.

a) Montrez que $\overline{AB}.\overline{AC} = AP^2$.

b) Une sécante variable passant par A coupe PP′ en M et le cercle en N. Montrez que le quadrilatère MNBC est inscriptible. Déduisez-en que:

$$\overline{AM}.\overline{AN} = AP^2.$$

12. — Soit deux cercles O et O′ de rayons R et R′, tangents extérieurement en A. Une tangente commune extérieure TT′ coupe la droite des centres en S. La tangente commune intérieure coupe TT′ en M.

a) Démontrez que le cercle de diamètre OO′ est tangent en M à TT′.

b) Déduisez-en que: $\overline{MA}^2 = RR'$ et $\overline{SM}^2 = \overline{SO}.\overline{SO'}$.

c) Démontrez que le cercle de diamètre TT′ est tangent en A à OO′ et que: $\overline{SA}^2 = \overline{ST}.\overline{ST'}$.

13. — On donne un cercle de centre O, de rayon a et deux diamètres perpendiculaires AB et CD. Une droite passant par B coupe la droite CD en N et recoupe le cercle en M.

a) Montrez que $\overline{BM}.\overline{BN} = 2a^2$.

b) La droite AM coupe CD en M′, la droite AN recoupe le cercle en N′. Que représente N pour le triangle ABM′ ? Déduisez-en que BN′ passe par M′.

Montrez que $\overline{BM'}.\overline{BN'} = 2a^2$.

c) Montrez que $\overline{ON}.\overline{OM'} = a^2$.

d) Démontrez que les points M, N, N′, M′ sont cocycliques, que OM est tangente en M et ON′ tangente en N′ à ce cercle.

14. — Soit un cercle de rayon R = 3,5 cm. On construit un diamètre BC de ce cercle, un point A du cercle tel que BA = 5,6 cm et la projection H de A sur BC.

a) Calculez les longueurs de AC, AH, BH.

b) On construit le cercle de centre C, de rayon CB. La droite AC le coupe en D et E. Que représente AB pour le triangle BDE ? pour les segments AD et AE ?

c) On trace la hauteur AF du triangle ABE. Montrez que AD.AE = BF.BE.

d) Une droite quelconque passant par A coupe le cercle de centre C en I et K. Montrez que: $AB^2 = AK.AI$.

Calculez la mesure de AI lorsque AK est égal $BC\sqrt{2}$.

15. — On donne un triangle isocèle ABC, qui a pour base BC. H étant le milieu de BC, on suppose HA>HB. On prend sur le segment BH un point O et l'on trace le cercle qui a pour centre O et qui passe par B. Ce cercle recoupe le côté AB en M et la droite BC en D.

a) Montrez que les quatre points O, M, A, C sont situés sur un même cercle. Montrez qu'il en est de même des quatre points D, H, M, A. Quelle relation avez-vous entre BM, BO, BA et BC ?

b) On donne BC = 24 cm, AH = 16 cm et l'on suppose que le point O divise le segment BC dans le rapport $\frac{5}{7}$. Calculez AB, OB, et OC. Calculez BM, puis DM. Calculez la hauteur du triangle ABC issue de C.

16. — Étant donnés trois points A, B, C en ligne droite, B étant situé entre A et C, on fait passer par B et C une circonférence de centre O et l'on mène les tangentes AD et AD' à cette circonférence. La droite DD' coupe AC en E et AO en F.

a) G étant le milieu de BC, démontrez que le quadrilatère FOGE est inscriptible.

b) Démontrez que l'on a la relation: $AD^2 = AE.AG$. Calculez AE en fonction de AB = a dans le cas où: $BC = \frac{2a}{3}$.

De quelle propriété jouit le point E lorsque le rayon du cercle O varie ?

c) Dans le cas où: AB = 12 cm, BC = 8 cm et OB = 5 cm, calculez la longueur des côtés du quadrilatère OFEG.

17. — Soit deux droites D_1 et D_2 perpendiculaires en O et un point A de D_1 tel que OA = a. Un angle droit $\widehat{xAy}$ tourne autour de A. Ax coupe D_2 en B et Ay coupe D_2 en C.

a) Montrez que le produit OB × OC reste constant quand l'angle $\widehat{xAy}$ tourne autour de A. Quelle est la valeur de ce produit ?

b) On abaisse de O la perpendiculaire OE sur Ax (E est sur Ax) et la perpendiculaire OF sur Ay (F est sur Ay). Sur quelle ligne se déplacent E et F quand $\widehat{xAy}$ tourne autour de A ? Montrez que EF reste constant.

c) Montrez que les triangles AEF et ABC sont semblables. Déduisez-en une relation métrique qui montre que les points B, C, E et F sont sur un même cercle.

d) On suppose: $AB = \frac{5a}{3}$. Calculez OB, AE et OE en fonction de a.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS DES RELATIONS MÉTRIQUES A DES PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

(21e LEÇON)

28. Moyenne proportionnelle à deux segments donnés.

Soit deux segments de longueurs données a et b ($a > b$).

Proposons-nous de construire le segment dont la longueur x est moyenne proportionnelle à a et b.

Cette longueur x doit être telle que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} .$$

Ou: $x^2 = ab$.

Cette dernière égalité rappelle par sa forme diverses relations métriques.

PREMIÈRE MÉTHODE DE CONSTRUCTION.

On sait que, si ABC est un triangle rectangle et AH la hauteur relative à l'hypoténuse, on a:

$$AB^2 = BC.BH .$$

La longueur x cherchée est celle du côté AB du triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse BC est égale à a et tel que la projection sur BC du côté AB soit égale à b.

Construisons ce triangle.

A cet effet, portons sur une droite XY et dans le même sens: BC = a et BH = b (fig. 43).

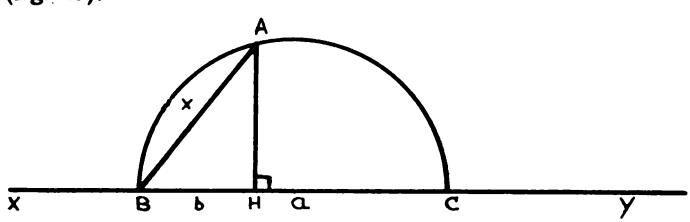

Fig. 43

Le sommet A du triangle est à l'intersection du demi-cercle de diamètre BC et de la perpendiculaire en H à BC.

On a: $AB = x$.

DEUXIÈME MÉTHODE DE CONSTRUCTION.

On sait que si ABC est un triangle rectangle et AH la hauteur relative à l'hypoténuse, on a:

$$AH^2 = HB.HC .$$

La longueur x cherchée est celle de la hauteur AH du triangle rectangle ABC tel que les projections de ses côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse BC aient pour longueurs a et b.

Construisons ce triangle.

A cet effet, portons sur une droite XY et en sens contraires deux segments HB = a et HC = b (fig. 44).

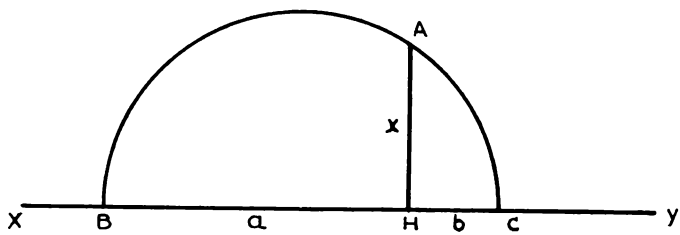

Fig. 44

Le sommet A du triangle est à l'intersection du demi-cercle de diamètre BC et de la perpendiculaire en H à BC.

On a: $AH = x$.

TROISIÈME MÉTHODE DE CONSTRUCTION.

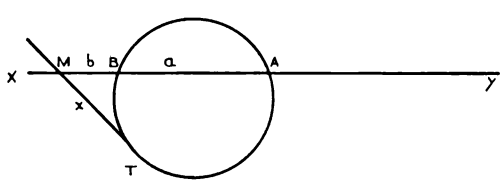

Fig. 45

On sait que: si d'un point M extérieur à un cercle, on mène une tangente MT et une sécante MAB, on a: $\overline{MT}^2 = \overline{MA}.\overline{MB}$.

Cette relation a même forme que: $x^2 = ab$.

Portons sur une droite XY et dans le même sens: MA = a et MB = b (fig. 45).

Construisons un cercle passant par A et B et menons par M une tangente MT à ce cercle.

Il vient: $MT^2 = \overline{MA}.\overline{MB}$.
On a: $MT^2 = ab$.
Donc: $MT = x$.

(22° LEÇON)

29. Construction d'un segment de longueur $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ (a et b étant deux longueurs données).

On sait que, si ABC est un triangle rectangle en A, on a:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 .$$

Ou: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$.

La longueur x cherchée est celle de l'hypoténuse BC du triangle rectangle ABC dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs a et b.

Construisons ce triangle.

A cet effet, portons sur les côtés AX et AY d'un angle droit $\widehat{XAY}$, les segments AB et AC de longueurs respectives a et b (fig. 46).

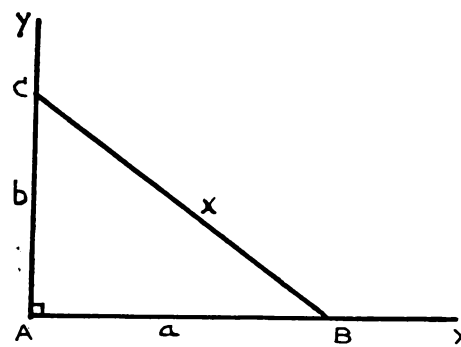

Fig. 46

On a: $BC = x$.

29. Construction d'un segment de longueur $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$.

On sait que, si ABC est un triangle rectangle, on a: $AB^2 = BC^2 - AC^2$ ou $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$.

La longueur x cherchée est celle du deuxième côté de l'angle droit d'un

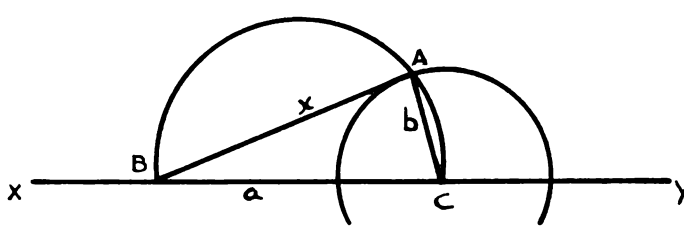

Fig. 47

triangle rectangle d'hypoténuse a et dont la longueur du premier côté de l'angle droit est b.

Portons sur une droite XY un segment BC de longueur a (fig. 47).

Le sommet A du triangle est à l'intersection du demi-cercle de diamètre BC et du cercle de centre C et de rayon b.

On a: $AB = x$.

31. Construction d'un segment de longueur $x = a\sqrt{k}$ (a étant une longueur donnée et k un nombre entier quelconque).

La relation $x = a\sqrt{k}$ peut s'écrire: $x^2 = a^2k$ ou: $x^2 = a \times ak$.
La longueur x est donc moyenne proportionnelle aux longueurs a et ak.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — a désignant une longueur donnée, construisez le segment de longueur x tel que:

$$x = a\sqrt{7}; \quad x = a\sqrt{15}; \quad x = a\sqrt{21}.$$

2. — Indiquez toutes les méthodes permettant de construire le segment de longueur x tel que:

$$x = a\sqrt{3}; \quad x = a\sqrt{5},$$

a étant une longueur donnée.

3. — Construisez la moyenne proportionnelle entre deux segments dont les longueurs sont 2 cm et 18 cm.

4. — Construisez la moyenne proportionnelle entre deux segments dont les longueurs sont 4,5 cm et 12,5 cm.

5. — Construisez un segment de longueur x tel que:

$x = \sqrt{4a^2+b^2}$; $x = \sqrt{4a^2+9b^2}$, a et b étant des longueurs données.

Application numérique: a = 3 cm; b = 4 cm.

6. — a, b, c étant des longueurs données, construisez le segment x tel que:

$x = \sqrt{a^2+4b^2+25c^2}$.

7. — a et b étant des longueurs données, construisez le segment x tel que:

$x = \sqrt{4a^2-b^2}$; $x = \sqrt{4a^2-9b^2}$.

Application numérique: a = 3 cm; b = 4 cm.

8. — a, b, c étant des longueurs données, construisez le segment x tel que:

$x = \sqrt{a^2-4b^2+25c^2}$.

9. — a et b étant des longueurs données, construisez le segment x tel que:

$x^2 = 6ab$.

Application numérique: a = 3 cm; b = 4 cm.

10. — Construisez un segment de longueur x tel que:

$$x = a(1 + \sqrt{2}) \; ; \; x = a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \; ; \; x = a(1 + \sqrt{5})$$

où a désigne une longueur donnée.

11. — Construisez un segment de longueur x tel que:

$$x = a(\sqrt{2} - 1); \; x = a\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \; ; \; x = a(\sqrt{5} - 1)$$

où a désigne une longueur donnée.

12. — a) Soit un triangle ABC rectangle en A, et de hauteur AH. Démontrez la relation:

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{BH}}{\overline{HC}} \; .$$

b) En désignant par a, b, c trois longueurs données, construisez les longueurs x et y définies par les formules:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{b}{c} \text{ et } \frac{a^2}{y} = \frac{b^2}{c} \; .$$

13. — a) Soit un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH. Démontrez la relation:

$$\frac{1}{\overline{AH}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2} \; .$$

b) Étant données les longueurs b, c et h, construisez les deux longueurs x et y définies par les formules:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \text{ et } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{c^2} \; .$$

14. — a étant une longueur donnée, construisez le segment de longueur x telle que:

$$x = a(\sqrt{3} - \sqrt{2}); \; x = a(\sqrt{5} + \sqrt{3}).$$

15. — a) Construisez un triangle rectangle ABC d'hypoténuse donnée BC = a et de hauteur donnée AH = m. A quelle condition le problème est-il possible ?

Quelles relations avez-vous entre les segments HB et HC ?

b) Déduisez de ce qui précède la construction de deux longueurs x et y connaissant leur somme a et leur moyenne proportionnelle m.

16. — a étant une longueur donnée, construisez le segment de longueur x telle que:

$$x = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}; \quad x = a\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

17. — a) On mène à un cercle de diamètre donné AB = d, une tangente de longueur donnée AM = m et on trace le diamètre IJ passant par M.

Quelles relations avez-vous entre les longueurs des segments MI et MJ ?

b) Déduisez de ce qui précède la construction de deux longueurs x et y connaissant leur différence d et leur moyenne proportionnelle m.

CHAPITRE VII

RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES D'UN ANGLE AIGU

(23e LEÇON)

32. Rapports trigonométriques.

Soit un angle $\widehat{xOy}$ de mesure Θ et un point M quelconque du côté Oy (fig. 48).

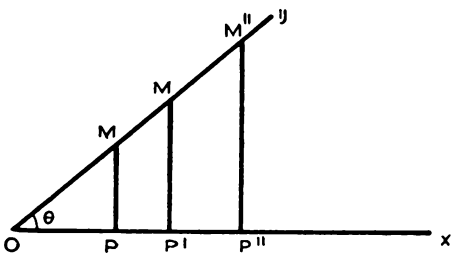

Fig. 48

Projetons orthogonalement le point M sur le côté Ox et soit P le point obtenu.

M′ étant un deuxième point du côté Oy et P′ sa projection sur le côté Ox (fig. 48), les deux triangles rectangles OMP et OM′P′ ayant un angle aigu commun sont semblables.

M″ étant un troisième point du côté Oy et P″ sa projection sur le côté Ox, les deux triangles OMP et OM″P″ sont semblables.

On dit que le triangle OMP reste semblable à lui-même quand M décrit Oy.

1°. On déduit de la similitude des triangles OM′P′ et OMP:

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{OM'}{OM} = \frac{P'M'}{PM} \quad .$$

Ou:

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{P'M'}{PM} \; ; \; \frac{OP'}{OP} = \frac{OM'}{OM} \; ; \; \frac{OP'}{OP} = \frac{P'M'}{PM} \quad .$$

On sait que:

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{P'M'}{PM} \Leftrightarrow \frac{PM}{OM} = \frac{P'M'}{OM'}$$

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{OM'}{OM} \Leftrightarrow \frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'}$$

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{P'M'}{PM} \Leftrightarrow \frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'}.$$

2°. La similitude des triangles OM''P'' et OMP nous donnerait également:

$$\frac{PM}{OM} = \frac{P''M''}{OM''} ; \frac{OP}{OM} = \frac{OP''}{OM''} ; \frac{PM}{OP} = \frac{P''M''}{OP''}.$$

Les valeurs des rapports $\frac{PM}{OM}$, $\frac{OP}{OM}$, $\frac{PM}{OP}$ sont donc indépendantes de la position du point M sur le côté Oy.

Nous verrons plus loin comment la connaissance de la valeur de l'un quelconque de ces rapports nous permet de construire l'angle $\widehat{xOy}$.

Ces rapports caractérisant l'angle $\widehat{xOy}$ sont appelés respectivement **sinus, cosinus et tangente de l'angle** Θ.

On note: $\sin \Theta = \frac{PM}{OM}$ (on lit: «Sinus Θ égale PM sur OM»)

$\cos \Theta = \frac{OP}{OM}$ (on lit: «Cosinus Θ égale OP sur OM»)

$\text{tg}\, \Theta = \frac{PM}{OP}$ (on lit: «tangente Θ égale PM sur OP»).

3°. Remarquons que dans le triangle rectangle OMP (fig. 48):

Le sinus de l'angle $\hat{O}$ *est le rapport du côté opposé à l'angle à l'hypoténuse du triangle.*

Le cosinus de l'angle $\hat{O}$ *est le rapport du côté adjacent à l'angle à l'hypoténuse du triangle.*

La tangente de l'angle $\hat{O}$ *est le rapport du côté opposé à l'angle au côté adjacent.*

On envisage dans la pratique, un quatrième rapport: l'inverse de la tangente qu'on nomme cotangente.

On note: $\text{Cotg}\, \Theta = \frac{OP}{PM}$ (on lit: «Cotangente Θ égale OP sur PM»).

La cotangente de l'angle $\hat{O}$ *du triangle rectangle OMP est le rapport du côté adjacent à l'angle au côté opposé.*

Les rapports qui viennent d'être définis sont appelés **rapports trigonométriques de l'angle** Θ.

33. Remarque: dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit étant toujours inférieur à l'hypoténuse, les rapports $\frac{PM}{OM}$ et $\frac{OP}{OM}$ sont inférieurs à l'unité.

La tangente et la cotangente, rapports des côtés de l'angle droit, peuvent prendre une valeur quelconque.

Réciproquement: tout nombre inférieur à 1 est le sinus (ou le cosinus) d'un angle aigu et d'un seul et tout nombre supérieur à 1 est la tangente (ou la cotangente) d'un angle aigu et d'un seul.

■ *Soit à construire un angle aigu* Θ *tel que: sin* $\Theta = 0{,}4$.

On pose:

$$\text{Sin}\,\Theta = 0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

On est ainsi amené à construire un triangle rectangle POM dont un côté de l'angle droit PM et l'hypoténuse OM sont proportionnels respectivement aux nombres 2 et 5 (fig. 49).

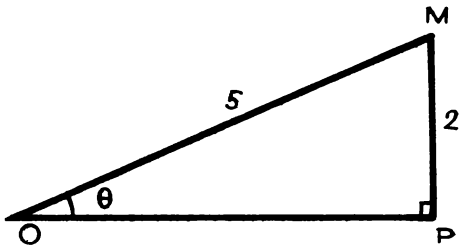

Fig. 49

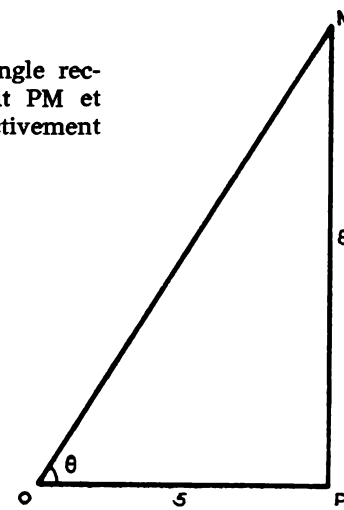

Fig. 50

On peut prendre: PM = 2 cm ; OM = 5 cm.

L'angle aigu $\widehat{POM}$ est l'angle Θ cherché.

■ *Construisons maintenant un angle aigu dont la tangente est égale à 1,6.*

On a: $\text{tg}\,\Theta = 1{,}6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$.

Ainsi, on est amené à construire un triangle rectangle POM dont les côtés de l'angle droit PM et OP sont proportionnels aux nombres 8 et 5 (fig. 50).

On peut prendre: PM = 8 cm ; OP = 5 cm.

L'angle aigu $\widehat{POM}$ est l'angle Θ cherché.

(24e LEÇON)

34. Propriété des rapports trigonométriques d'angles complémentaires.

Nous avons défini plus haut les rapports trigonométriques de l'angle $\hat{O}$ du triangle rectangle OMP (fig. 51).

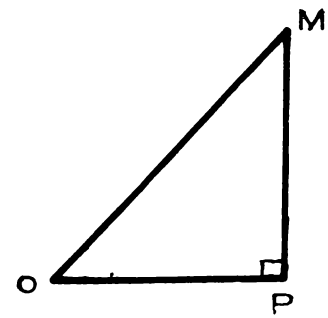

Fig. 51

On a: $\text{Sin}\,\hat{O} = \dfrac{PM}{OM}$; $\cos\hat{O} = \dfrac{OP}{OM}$;

$\text{tg}\,\hat{O} = \dfrac{PM}{OP}$; $\text{cotg}\,\hat{O} = \dfrac{OP}{PM}$.

On peut définir de même les rapports trigonométriques de l'angle $\hat{M}$ du même triangle.

Il vient: $\sin\hat{M} = \dfrac{OP}{OM}$; $\cos\hat{M} = \dfrac{PM}{OM}$; $\text{tg}\,\hat{M} = \dfrac{OP}{PM}$; $\text{cotg}\,\hat{M} = \dfrac{PM}{OP}$.

Comparons les rapports trigonométriques des angles $\hat{O}$ et $\hat{M}$ qui sont complémentaires.

Il en résulte:

$$\text{Sin}\,\hat{M} = \cos\hat{O}.$$
$$\text{Cos}\,\hat{M} = \sin\hat{O}$$
$$\text{tg}\,\hat{M} = \text{cotg}\,\hat{O}$$
$$\text{cotg}\,\hat{M} = \text{tg}\,\hat{O}$$

Lorsque deux angles sont complémentaires:
— le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre,
— la tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre.

35. Relations entre les rapports trigonométriques d'un même angle.

1°. *RELATION ENTRE tg Θ ET cotg Θ.*

On a trouvé plus haut: $\text{tg}\,\Theta = \dfrac{PM}{OP}$; $\text{cotg}\,\Theta = \dfrac{OP}{PM}$.

On déduit, en comparant ces rapports:

$$\boxed{\cot g\,\Theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\,\Theta}}$$

2°. *RELATION ENTRE tg* Θ, *sin* Θ, *cos* Θ.

On a trouvé plus haut: $\sin\Theta = \dfrac{PM}{OM}$; $\cos\Theta = \dfrac{OP}{OM}$.

En divisant membre à membre, il vient:

$$\frac{\sin\Theta}{\cos\Theta} = \frac{PM}{OP}\ .$$

Or: $$\frac{PM}{OP} = \operatorname{tg}\Theta\ .$$

D'où:

$$\boxed{\operatorname{tg}\,\Theta = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta}}$$

3°. *RELATION ENTRE sin* Θ, *cos* Θ.

On a: $\sin\Theta = \dfrac{PM}{OM}$; $\cos\Theta = \dfrac{OP}{OM}$.

Élevons au carré et ajoutons membre à membre:

$$(\operatorname{Sin}\Theta)^2 + (\cos\Theta)^2 = \frac{PM^2}{OM^2} + \frac{OP^2}{OM^2} = \frac{PM^2 + OP^2}{OM^2}\ .$$

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle POM donne:

$$PM^2 + OP^2 = OM^2\ .$$

Posons: $(\sin\Theta)^2 = \sin^2\Theta$ et: $(\cos\Theta)^2 = \cos^2\Theta$.

Il vient: $$\sin^2\Theta + \cos^2\Theta = \frac{OM^2}{OM^2}$$

ou:

$$\boxed{\operatorname{Sin}^2\Theta + \cos^2\Theta = 1}$$

36. Applications

1°. *Divisons les deux membres de la relation précédente par* $\cos^2 \Theta$.

On obtient:

$$\frac{\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta}{\cos^2 \Theta} = \frac{1}{\cos^2 \Theta}.$$

Ou: $$\frac{\sin^2 \Theta}{\cos^2 \Theta} + \frac{\cos^2 \Theta}{\cos^2 \Theta} = \frac{1}{\cos^2 \Theta}$$

Or: $$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin^2 \Theta}{\cos \Theta} \text{ et } (\operatorname{tg} \Theta)^2 = \left(\frac{\sin \Theta}{\cos \Theta}\right)^2 = \frac{\sin^2 \Theta}{\cos^2 \Theta}.$$

Posons: $(\operatorname{tg} \Theta)^2 = \operatorname{tg}^2 \Theta$.

Il vient:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 \Theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \Theta}}$$

2°. En divisant les deux membres de la relation: $\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta = 1$ par $\sin^2 \Theta$, il vient:

$$\boxed{\operatorname{cotg}^2 \Theta + 1 = \frac{1}{\sin^2 \Theta}}$$

Ces diverses relations permettent de calculer les rapports trigonométriques d'un angle connaissant l'un d'eux.

Soit, par exemple, à calculer les rapports trigonométriques de l'angle aigu Θ *sachant que* $\sin \Theta = 0{,}6$.

On a: $\cos^2 \Theta = 1 - \sin^2 \Theta = 1 - (0{,}6)^2 = 0{,}64$.

D'où: $\cos \Theta = 0{,}8$

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

On a également: Cotg: $\Theta = \frac{4}{3}$.

(25e LEÇON)

37. Rapports trigonométriques d'angles quelconques. Table trigonométrique.

On a fait le calcul des valeurs approchées des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes d'angles quelconques et on a consigné les résultats obtenus dans une table appelée **table trigonométrique** qu'on trouvera à la fin de ce chapitre.

Les angles y sont exprimés en degrés et en grades.

Pour établir cette table, il a fallu simplement trouver les rapports trigonométriques des angles compris entre 0° et 45° (0 et 50 gr): ceux des angles compris entre 45° et 90° (50 gr et 100 gr) complémentaires des premiers sont alors immédiats (24e leçon).

1°. Ainsi, la première colonne de la table comportant les angles compris entre 0° et 45°, on a marqué dans la dernière, à la fin de chaque ligne horizontale, la valeur du complément de l'angle correspondant.

Le sinus d'un angle lu à gauche est égal au cosinus de l'angle lu à droite.

La tangente d'un angle lu à gauche est égale à la cotangente de l'angle lu à droite.

Exemple: 0,3584, sinus de 21°, est aussi le cosinus de 69°.
0,6249, tangente de 32°, est aussi la cotangente de 58°.

2°. La lecture de la table de haut en bas fournit les rapports trigonométriques des angles de 0 à 45° (0 à 50 gr).

3°. La lecture de la table de bas en haut fournit les rapports trigonométriques des angles de 45° à 90° (50 gr à 100 gr).

Calculons cos 33°.

Au croisement de la colonne en haut de laquelle est écrit cosinus et de la ligne qui commence par 33, on lit: 0,8387.

On a ainsi: $\cos 33° = 0{,}8387$.

Calculons cotg 73 gr.

Au croisement de la colonne en bas de laquelle est écrit cotangente et de la ligne qui finit par 73, on lit: 0,4515.

On a ainsi: $\text{cotg } 73° = 0{,}4515$.

Proposons-nous de calculer sin 33°15′.

Cet angle ne figure pas sur la table; celle-ci donne:

$$\sin 33° = 0{,}5446\,.$$
$$\sin 34° = 0{,}5592\,.$$

Le sinus de 33°15′ est compris entre celui de 33° et celui de 34°.

Pour le déterminer, on fait le raisonnement suivant:

Pour une augmentation de l'angle de 1° ou 60′ (34° — 33°), le sinus augmente de 0,5592 — 0,5446 = 0,0146.

Pour une augmentation de l'angle de 1′, le sinus augmente de $\frac{0{,}0146}{60}$.

Pour une augmentation de l'angle de 15′, le sinus augmente de:

$$\frac{0{,}0146 \times 15}{60} = 0{,}00365\,.$$

D'où: $\sin 33°15' = 0{,}5446 + 0{,}00365\,.$
$\sin 33°15' = 0{,}54825\,.$

On a admis dans ce qui précède que l'accroissement de l'angle et l'accroisement du sinus sont proportionnels.

Soit à calculer: cos 72°30′.

La table donne: $\cos 72° = 0{,}3090.$
$\cos 73° = 0{,}2924.$

Pour une augmentation de 1° ou 60′, le cosinus diminue de 0,0166.

Pour une augmentation de 1′, le cosinus diminue de $\frac{0{,}0166}{60}$.

Pour une augmentation de 30′, le cosinus diminue de $\frac{0{,}0166 \times 30}{60} =$ 0,0083.

$$\cos 72°30' = 0{,}3090 - 0{,}0083 = 0{,}3007.$$

Calculons cotg 22,35 gr.

La table donne: $\operatorname{cotg} 22\,\text{gr} = 2{,}7776$
$\operatorname{cotg} 23\,\text{gr} = 2{,}6464\,.$

Pour une augmentation de l'angle de 1 gr, la cotangente diminue de 0,1312.

Pour une augmentation de l'angle de 0,35 gr, la cotangente diminue de:

$$\frac{0{,}1312 \times 35}{100} = 0{,}04592\,.$$

D'où: $\operatorname{cotg} 22{,}35\,\text{gr} = 2{,}73168.$

Remarque: Lorsque l'angle varie de 0° à 90° (de 0 gr à 100 gr), son sinus et sa tangente augmentent alors que son cosinus et sa cotangente diminuent.

(26e LEÇON)

38. Détermination des rapports trigonométriques des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

On peut déterminer les rapports trigonométriques de certains angles sans consulter la table.

1°. *RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DE 0° ET 90° (0 gr et 100 gr).*

Soit un angle $\widehat{xOy}$ de 0°: M un point du côté Oy se projetant orthogonalement en P sur Ox.

Les points M et P sont confondus.

On a: $\sin \widehat{xOy} = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{0}{OM}$ d'où $\sin 0° = 0$.

$$\cos \widehat{xOy} = \frac{OP}{OM} = \frac{OM}{OM} = 1 \text{ d'où } \cos 0° = 1.$$

On en déduit: $\operatorname{tg} 0° = \dfrac{\sin 0°}{\cos 0°} = \dfrac{0}{1} = 0$.

La cotangente étant l'inverse de la tangente, la cotangente de 0° n'est pas définie.

L'angle de 90° étant le complément de 0°, on a:

$$\sin 90° = 1 \; ; \cos 90° = 0 \; ; \operatorname{cotg} 90° = 0.$$

La tangente de 90° n'est pas définie.

2°. *RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DE 30° ET 60°.*

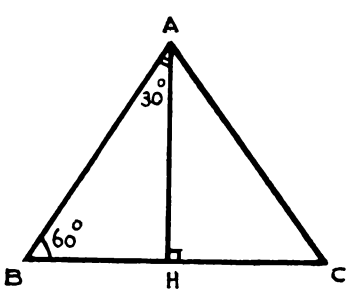

Fig. 52

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.

La hauteur AH partage le triangle donné en deux triangles rectangles égaux (fig. 52).

Nous savons que: $\widehat{BAH} = 30°$

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$BH = \frac{a}{2}.$$

Dans le triangle rectangle ABH, on a:

$$\sin \widehat{BAH} = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

Dans le même triangle, on a:

$$\cos \widehat{BAH} = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\operatorname{tg} \widehat{BAH} = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La cotangente est alors égale à $\sqrt{3}$.
L'angle de 60° étant le complément de celui de 30°, on a:

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \quad \cos 60° = \frac{1}{2} \; ; \quad \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} \; ; \quad \operatorname{cotg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3°. *RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DE 45°.*

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle de côté a (fig. 53).

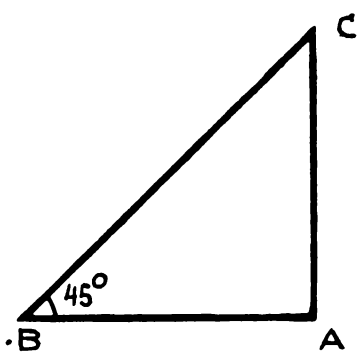

Fig. 53

On a: $\widehat{ABC} = 45°$
$AB = AC$.

On sait que: $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$.

Or: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AC^2$
$BC = AC\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

D'où: $\sin \widehat{ABC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On a également: $\cos \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\operatorname{tg} \widehat{ABC} = 1$

$\operatorname{cotg} \widehat{ABC} = 1$.

On résume tous les résultats précédents dans le tableau suivant:

Angles	*Sinus*	*Cosinus*	*Tangente*	*Cotangente*
0°	0	1	0	non définie
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	non définie	0

(27e LEÇON)

39. Détermination d'un angle aigu connaissant un de ses rapports trigonométriques.

1°. *Soit à calculer l'angle aigu dont le sinus est égal à 0,5592.*

On lit sur la table: $\sin 34° = 0{,}5592$.

2°. *Calculons l'angle dont la cotangente est égale à 0,7757.*

On lit sur la table: $\operatorname{cotg} 58\,\text{gr} = 0{,}7757$.

3°. *Proposons-nous maintenant de calculer l'angle dont le cosinus est égal à 0,7422.*

On lit sur la table: $\cos 43° = 0{,}7314$

$\cos 42° = 0{,}7431$.

L'angle cherché est donc compris entre 42° et 43°.

On fait alors le raisonnement suivant:

Pour une augmentation du cosinus de: $0{,}7431 - 0{,}7314 = 0{,}0117$, l'angle diminue de 1° ou 60′.

Pour une augmentation du cosinus de: $0{,}7422 - 0{,}7314 = 0{,}0108$, l'angle diminue de: $\dfrac{60' \times 0{,}0108}{0{,}0117} = 54'$.

On a donc: **0,7422 = cos 42°6′**

2°. *Calculons l'angle dont la tangente est égale à 0,7436.*

La table donne: $\operatorname{tg} 40\text{ gr} = 0{,}7265$
$\operatorname{tg} 41\text{ gr} = 0{,}7508$.

Pour une augmentation de la tangente de: $0{,}7508 - 0{,}7265 = 0{,}0243$, l'angle augmente de 1 gr.

Pour une augmentation de la tangente de: $0{,}7436 - 0{,}7265 = 0{,}0171$, l'angle augmente de: $\dfrac{1 \times 0{,}0171}{0{,}0243} = 0{,}7\text{ gr}$.

On a donc: **0,7436 = tg 40,7 gr**

(28e LEÇON)

40. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.

Les relations qu'on peut établir entre les mesures des côtés d'un triangle ABC et les rapports trigonométriques des angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ sont appelées **relations trigonométriques dans le triangle ABC.**

Soit un triangle ABC rectangle en A et dont les côtés mesurent respectivement a, b, c (fig. 54).

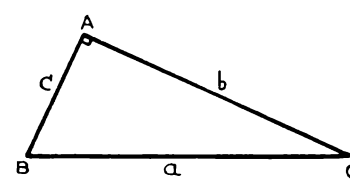

Fig. 54

On sait que: $\sin \hat{B} = \dfrac{b}{a}$; $\sin \hat{C} = \dfrac{c}{a}$.

D'où: $b = a \sin \hat{B}$; $c = a \sin \hat{C}$.

Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par le sinus de l'angle opposé.

On a également (fig. 55).

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} ; \cos \hat{C} = \frac{b}{a}.$$

D'où: $c = a \cos \hat{B}$; $b = a \cos \hat{C}$.

Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par le sinus de l'angle adjacent à ce côté.

On peut encore écrire (fig. 55):

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} \; ; \; \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b}$$

D'où: $b = c \operatorname{tg} \hat{B}$; $c = b \operatorname{tg} \hat{C}$.

Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit du second côté par la tangente de l'angle opposé.

On a enfin:

$$\operatorname{cotg} \hat{B} = \frac{c}{b} \; ; \; \operatorname{cotg} \hat{C} = \frac{b}{c}.$$

D'où $c = b \operatorname{cotg} \hat{B}$; $b = c \operatorname{cotg} \hat{C}$.

Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit du second côté par la cotangente de l'angle adjacent au premier.

41. Résolution d'un triangle rectangle.

Résoudre un triangle, c'est calculer ses éléments inconnus en utilisant les mesures connues de certains éléments.

— **Premier exemple:** *soit à résoudre un triangle rectangle sachant que l'hypoténuse a pour longueur a et l'un des angles aigus ($\hat{B}$ par exemple) a pour mesure* Θ.

On a immédiatement: $\hat{C} = 1^D - B = 1^D - \Theta$
$b = a \sin \Theta$; $c = a \cos \Theta$.

Application numérique: $a = 325$ mm ; $\hat{B} = 38°$.

On a: $\hat{C} = 90° - 38° = 52°$
$b = 325 \times 0{,}6157 = 200{,}10$ mm
$c = 325 \times 0{,}7880 = 256{,}10$ mm.

— **Deuxième exemple:** *soit à résoudre un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et un côté de l'angle droit b.*

On a: $\sin \hat{B} = \frac{b}{a}$; $\hat{C} = 1^D - \hat{B}$ et $c = a \cos \hat{B}$.

Ces relations nous permettent de calculer les éléments inconnus.

— **Troisième exemple:** *soit à résoudre un triangle rectangle connaissant les deux côtés de l'angle droit b et c.*

On a, pour déterminer les éléments inconnus:

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} \; ; \; \hat{C} = 1^D - \hat{B} \text{ et } a = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

ou: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

RÉSUMÉ

Lorsque deux angles sont complémentaires:
— le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre,
— la tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre.

Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par le sinus de l'angle opposé.

Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle adjacent à ce côté.

Dans tout triangle, rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit du second côté par la tangente de l'angle opposé.

Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit du second côté par la cotangente de l'angle adjacent au premier.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — Donnez à l'aide de la table les rapports trigonométriques des angles suivants:

23°; 37°; 75°; 87°.
32 gr; 47 gr; 90 gr; 97 gr.

Degrés	Sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente	
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	87
4	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	86
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61
30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53
38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48
43	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45
	Cosinus	Sinus	Cotangente	Tangente	Degrés

Grades	Sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente	
1	0,0157	0,9999	0,0157	63,6567	99
2	0,0314	0,9995	0,0314	31,8205	98
3	0,0471	0,9989	0,0472	21,2049	97
4	0,0628	0,9980	0,0629	15,8945	96
5	0,0785	0,9969	0,0787	12,7062	95
6	0,0941	0,9956	0,0945	10,5789	94
7	0,1097	0,9940	0,1104	9,0579	93
8	0,1253	0,9921	0,1263	7,9158	92
9	0,1409	0,9900	0,1423	7,0264	91
10	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	90
11	0,1719	0,9851	0,1745	5,7297	89
12	0,1874	0,9823	0,1908	5,2422	88
13	0,2028	0,9792	0,2071	4,8288	87
14	0,2181	0,9759	0,2235	4,4737	86
15	0,2334	0,9724	0,2401	4,1653	85
16	0,2487	0,9686	0,2568	3,8947	84
17	0,2639	0,9646	0,2736	3,6554	83
18	0,2790	0,9603	0,2905	3,4420	82
19	0,2940	0,9558	0,3076	3,2506	81
20	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	80
21	0,3239	0,9461	0,3424	2,9208	79
22	0,3387	0,9409	0,3600	2,7776	78
23	0,3535	0,9354	0,3779	2,6464	77
24	0,3681	0,9298	0,3959	2,5257	76
25	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142	75
26	0,3971	0,9178	0,4327	2,3109	74
27	0,4115	0,9114	0,4515	2,2148	73
28	0,4258	0,9048	0,4706	2,1251	72
29	0,4399	0,8980	0,4899	2,0413	71
30	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	70
31	0,4679	0,8838	0,5295	1,8887	69
32	0,4818	0,8763	0,5498	1,8190	68
33	0,4955	0,8686	0,5704	1,7532	67
34	0,5090	0,8607	0,5914	1,6909	66
35	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319	65
36	0,5358	0,8443	0,6346	1,5757	64
37	0,5490	0,8358	0,6569	1,5224	63
38	0,5621	0,8271	0,6796	1,4715	62
39	0,5750	0,8181	0,7028	1,4229	61
40	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	60
41	0,6004	0,7997	0,7508	1,3319	59
42	0,6129	0,7902	0,7757	1,2892	58
43	0,6252	0,7804	0,8012	1,2482	57
44	0,6374	0,7705	0,8273	1,2088	56
45	0,6494	0,7604	0,8541	1,1709	55
46	0,6613	0,7501	0,8816	1,1343	54
47	0,6730	0,7396	0,9099	1,0990	53
48	0,6845	0,7290	0,9391	1,0649	52
49	0,6959	0,7181	0,9691	1,0319	51
50	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	50
	Cosinus	Sinus	Cotangente	Tangente	Grades

2. — Cherchez les rapports trigonométriques des angles suivants:
$12°20'$; $32°45'$; $62°40'$; $74°24'$.
16,52 gr; 30,25 gr; 75,45 gr; 82,34 gr.

3. — Construisez les angles qui ont pour cosinus:
$\frac{2}{3}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 0,32 ; 0,80.

4. — Construisez les angles qui ont pour tangente:
1,6; $\sqrt{3}$; 3,5; 0,45.

5. — Construisez les angles qui ont pour sinus:
0,8 ; $\frac{3}{5}$; 0,3 ; $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. — Soit x la valeur d'un angle aigu en degrés. Déterminez x sachant que:
$\sin x = 0{,}2048$; $\cos x = 0{,}9380$; $\operatorname{tg} x = 0{,}3442$; $\operatorname{cotg} x = 2{,}2751$;
$\sin x = 0{,}7320$; $\cos x = 0{,}5872$; $\operatorname{tg} x = 1{,}1205$; $\operatorname{cotg} x = 0{,}6230$.

7. — Soit x la valeur d'un angle aigu en grades. Determinez x sachant que:
$\sin x = 0{,}3820$; $\cos x = 0{,}9361$; $\operatorname{tg} x = 0{,}5020$; $\operatorname{cotg} x = 2{,}2130$;
$\sin x = 0{,}8060$; $\cos x = 0{,}5862$; $\operatorname{tg} x = 2{,}1050$; $\operatorname{cotg} x = 0{,}8040$.

8. — On donne $\sin x = 0.4$. Calculez $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

9. — On donne $\operatorname{cotg} x = 1{,}4$. Calculez $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

10. — On donne $\operatorname{tg} x = 2$. Calculez $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{cotg} x$.

11. — Vérifiez la relation: $2 - \sin^2 x = \cos^2 x(2 + \operatorname{tg}^2 x)$.

Démontrez les relations suivantes:

12. — $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$.

13. — $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$.

14. — $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

15. — $(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 4 \sin x \cos x$.

a, b, c, A, B, C désignant respectivement les côtés et les angles d'un triangle ABC, résolvez un triangle rectangle ABC sachant:

16. — $a = 15$ cm; $\hat{B} = 27°$.

17. — $a = 25$ cm; $\hat{C} = 29$ gr.

18. — $a = 43$ cm; $b = 18$ cm. Les angles seront exprimés en degrés.

19. — $a = 75$ cm; $c = 47{,}5$ cm. Les angles seront exprimés en grades.

20. — $b = 7$ cm; $c = 6$ cm. Les angles seront exprimés en degrés.

21. — $b = (\sqrt{2} + 1)$cm; $c = (\sqrt{2} - 1)$cm. Les angles seront exprimés en grades.

22. — Soit un quart de cercle de centre O de rayon 1, limité par deux rayons OA et OB.

Soit M un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ se projetant en A sur OA et en B' sur OB.

La droite OM coupe la tangente en A au point P et la tangente en B au point Q; la tangente en M coupe OA en C et OB en D.

Évaluez, en fonction des rapports trigonométriques de l'angle $\overset{\frown}{AOM} = \alpha$, les longueurs des segments OA', OB, OP, OC, OD.

23. — Dans un triangle, on donne AB = 5 cm, AC = 6 cm et $\hat{A} = 30°$.

a) On trace la hauteur BH. Calculez AH, BH, CH.

b) Calculez BC.

c) Reprenez les mêmes questions avec: $\hat{A} = 45°$; $\hat{A} = 60°$.

24. — Dans un triangle ABC rectangle en A, les côtés de l'angle droit ont pour mesures: AC = 15 cm; AB = 10 cm.

a) Calculez la mesure de l'angle $\hat{B}$ en degrés.

b) La bissectrice intérieure de l'angle $\hat{B}$ coupe AC en D. Calculez AD.

c) Le point A se projette sur BD en E. Calculez AE.

25. — Dans un trapèze rectangle ABCD, les bases sont AB et CD. On donne:

AB = 35 cm; BC = 10 cm; CD = 27 cm.

a) On trace la hauteur CH. Calculez, en grades, les angles du triangle CHB. Calculez les côtés de ce triangle.

b) Déduisez-en les angles du trapèze.

26. — Soit un triangle ABC d'angles aigus et de côtés a, b, c. On désigne par O le centre du cercle circonscrit et par H le milieu de BC.

a) Quelle est la nature du triangle BOH ?

b) Évaluez le rayon du cercle circonscrit en fonction de a et d'un rapport trigonométrique de l'angle $\hat{A}$.

b) Démontrez la relation: $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} = \dfrac{c}{\sin \hat{C}}$.

27. — Soit un triangle isocèle ABC de base BC et AH la hauteur issue de A. On donne $\overset{\frown}{BAC} = 2x$ et AB = a.

a) Évaluez en fonction de a et des rapports trigonométriques de l'angle x les longueurs des segments AH et BH.

b) Évaluez en fonction de a et des rapports trigonométriques de l'angle 2x la hauteur issue de B.

Application numérique: reprenez le même problème avec:

$a = 15$ cm; $x = 15°$.

28. — On donne un triangle isocèle OAB de base AB et on mène les hauteurs OH et AK. On pose OA = a et on désigne par Θ l'angle $\overset{\frown}{AOH}$.

a) Évaluez en fonction de a et de Θ les côtés du triangle AKB.

b) Évaluez en fonction de a et de 2Θ les côtés des triangles OKA et AKB.

c) Déduisez des deux questions précédentes: sin 2Θ, cos 2Θ et tg 2Θ en fonction de sin Θ, cos Θ et tg Θ.

29. — Soit un triangle ABC rectangle en A et D un point pris sur AC.
On mène la hauteur AH du triangle ABC et la perpendiculaire CE à la droite BD. Les droites BA et CE se coupent en F.

a) Comparez les triangles ABD et ECD.

b) Démontrez que le quadrilatère ABCE est inscriptible dans un cercle dont on déterminera le centre O.

c) En supposant: $\widehat{ABC} = 60°$, BC = 2a, AD = a, calculez les longueurs AC, AH et CD.

d) Quelle est la nature des triangles ACF et BEF ? Calculez les longueurs FA, FB et FC.

30. — Soit un triangle ABC, tel que BC = 2a, $\hat{C} = 45°$ et $\hat{A} = 60°$ (a étant une longueur donnée). On mène les hauteurs BE et CF.

a) Montrez que les quatre points B, F, E, C sont sur un même cercle.
Précisez la position de son centre I. Quelle est la position du point E sur le cercle ?

b) Montrez que le triangle IFE est équilatéral.

c) Calculez en fonction de a la longueur des segments CE et BE.
En utilisant le triangle AEB, calculez ensuite AB, puis AE.

d) Soit K l'intersection de IF avec BE. Montrez que les triangles IBK et CFE sont semblables.

31. — On trace à l'intérieur d'un angle droit $\widehat{xOy}$ une demi-droite OZ telle que $\widehat{xOZ} = \Theta$. Soit un point H de OZ tel que OH = h.
Menez par H la perpendiculaire à OZ coupant Ox en A et Oy en B.
La perpendiculaire en A à Ox coupe OZ en A et la perpendiculaire en B à Oy coupe OZ en B'.

a) Calculez les côtés du triangle OAA' et ceux du triangle OBB' en fonction de h et des rapports trigonométriques de l'angle Θ.

b) Démontrez les relations:

$$AA'.BB' = OA.OB\ ;\ \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} = \frac{1}{h}.$$

c) Calculez Θ pour que: $\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

32. — Sur une demi-droite Ax, on prend deux points H et H' tels que: AH = 4 cm, AH' = 9 cm et un point B tel que: AB = a cm avec $a > 9$.
On trace un demi-cercle de diamètre AB, qui coupe les perpendiculaires à Ax menées par H et H' respectivement en M et M'.

a) Calculez AM et AM' en fonction de a.

Quelle est la valeur du rapport $\dfrac{AM}{AM'}$?

Montrez que cette valeur ne dépend pas de la position de B sur Ax.

b) On mène la bissectrice intérieure Ay de l'angle $\widehat{MAM'}$; elle coupe MM' en I. Puis, par M et M', on mène les perpendiculaires à Ay; elles coupent cette droite en N et N'.

Comparez les triangles AMN et AM'N'. Calculez les rapports $\dfrac{MN}{M'N'}$ et $\dfrac{IM}{IM'}$.

c) On suppose a = 13 cm. Calculez le sinus, le cosinus, la tangente de l'angle $\widehat{HMH'}$.

33. — Soit une droite xy et un point A dont la distance à xy est AH = 6 cm.
De part et d'autre de AH, on trace deux demi-droites d'origine A, coupant xy en B et C et telles que: $\widehat{HAB} = 45°$, $\widehat{HAC} = 30°$.
Le cercle de diamètre AH coupe AB en D, AC en E.

a) Calculez les longueurs des segments AB, AE, AC.

b) Montrez que les triangles ABC et ADE sont semblables. Calculez la valeur du rapport de similitude et la longueur du segment DE.

c) Soit F le point diamétralement opposé à D. Quelle est en degrés la mesure de l'angle $\widehat{DFE}$?
Calculez la valeur du sinus de 75°.

CHAPITRE VIII

POLYGONES RÉGULIERS CONVEXES

(29e LEÇON)

42. Définition du polygone régulier convexe.

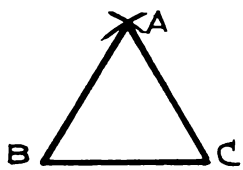

Fig. 55

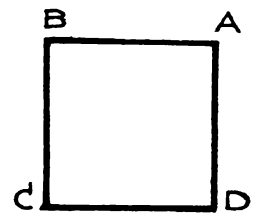

Fig. 56

La figure 55 représente un triangle équilatéral ABC: il a ses côtés égaux et ses angles égaux.

La figure 56 représente un carré ABCD: il a ses côtés égaux et ses angles égaux.

En tenant compte de ces propriétés, on dit que ces polygones sont r é g u l i e r s.

Un polygone régulier convexe est un polygone convexe qui a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux.

43. Étude d'un polygone régulier convexe de n côtés.

1°. *Soit un polygone régulier convexe ABCDEF..... de n côtés* (fig. 57).

Construisons les bissectrices Ax et By des angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ du polygone. Elles sont concourantes en O puisque la somme des angles $\frac{\hat{A}}{2}$ et $\frac{\hat{B}}{2}$ est inférieure à 2 droits (Géométrie, 2e année).

Le triangle OAB, ayant deux angles égaux comme moitiés de deux angles égaux, est isocèle de sommet O.

Construisons la bissectrice de l'angle $\hat{C}$ et soit O′ l'intersection de cette bissectrice avec OB.

Le triangle O'BC est isocèle de sommet O' (la démonstration est la même que celle relative au triangle OAB).

Or, les triangles isocèles OAB et O'BC sont égaux: ils ont un côté égal (AB = AC), adjacent à deux angles respectivement égaux (moitiés d'angles égaux).

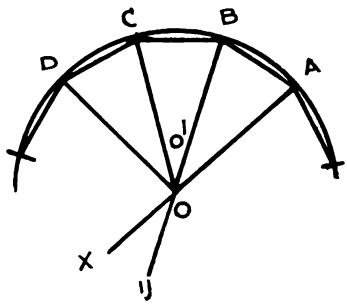

Fig. 57

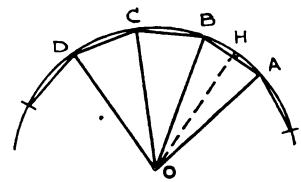

Fig. 58

Ainsi, les côtés BO et BO' étant égaux, les points O et O' sont confondus et la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$ passe par le point O.

On établit de la même manière que les bissectrices de tous les angles du polygone donné sont concourantes en O.

Le polygone est décomposé en n triangles isocèles égaux dont le sommet commun est le point O qui se trouve à égale distance de tous les sommets du polygone.

Le point O est donc centre d'un c e r c l e c i r c o n s c r i t au polygone régulier donné.

2°. Dans le polygone régulier de n côtés ABCDE..., menons la hauteur OH du triangle OAB (fig. 58).

Les hauteurs issues de O de tous les triangles isocèles en lesquels le polygone a été décomposé sont égales puisque ces triangles sont tous égaux.

Les pieds de ces hauteurs, milieux des côtés du polygone régulier, sont donc situés sur un cercle de centre O: c'est le c e r c l e i n s c r i t dans le polygone régulier.

Les côtés du polygone régulier sont tangents à ce cercle puisqu'ils sont respectivement perpendiculaires aux rayons qui passent par leur point de contact.

Tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle et circonscriptible à un autre.
Ces deux cercles ont même centre.

Le centre commun des cercles circonscrit et inscrit est le centre du polygone.

Les rayons des cercles circonscrit et inscrit sont respectivement appelés rayon et **apothème** du polygone régulier.

L'angle au centre formé par les rayons joignant le centre à deux sommets consécutifs est l'angle au centre du polygone régulier.

(30e LEÇON)

44. Étude de quelques polygones réguliers simples: carré, hexagone régulier, triangle équilatéral.

Nous désignerons par R le rayon du cercle circonscrit, par c le côté et par a l'apothème.

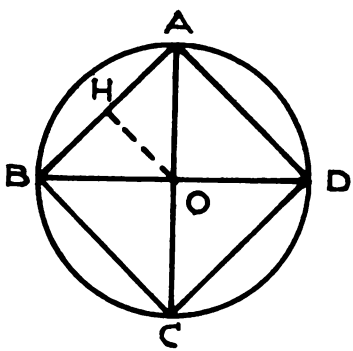

Fig. 59

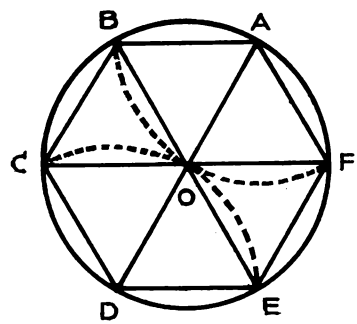

Fig. 60

1°. L'angle au centre du carré étant égal à: $\frac{360°}{4} = 90°$, ce polygone est obtenu par la construction de deux diamètres perpendiculaires AC et BD (fig. 59).

Le triangle AOB étant isocèle et rectangle en O, il vient:

$$AB = R\sqrt{2} \quad \text{et} \quad OH = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Par suite:

$$\boxed{c = R\sqrt{2}\,; \quad a = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

2°. L'angle au centre de l'hexagone régulier (par exemple $\widehat{AOB}$) est égal à 60° (fig. 60).

Le triangle AOB est équilatéral puisqu'il est isocèle et que l'angle $\widehat{AOB}$ mesure 60°.

Il en résulte: $AB = R$ et $OH = \frac{R}{2}\sqrt{3}$.

$c = R$	$a = \frac{R}{2}\sqrt{3}$

Pour la construction de l'hexagone régulier, on peut opérer de la façon suivante:

Le cercle circonscrit à l'hexagone régulier étant donné, on trace un diamètre AD de ce cercle.

Un arc de cercle de centre A et de rayon R coupe le cercle circonscrit au polygone aux points B et F, sommets de l'hexagone.

Un arc de cercle de centre D et de rayon R coupe le cercle circonscrit aux points C et E, sommets de l'hexagone.

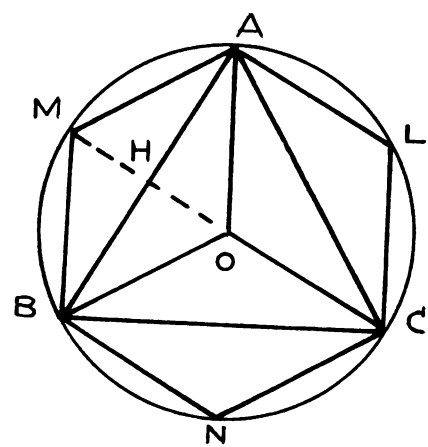

Fig. 61

3°. L'angle au centre d'un triangle équilatéral (par exemple $\widehat{AOB}$) est égal à: $\frac{360°}{3} = 120°$ (fig. 61).

On construit facilement un triangle équilatéral en joignant de deux en deux les sommets d'un hexagone régulier comme l'indique la figure 62.

Les diagonales AB et OM du losange AOBM sont perpendiculaires et se coupent en H, milieu de AB et de OM.

Le triangle AOM étant équilatéral de côté R, il en résulte:

$$AH = \frac{R}{2}\sqrt{3}\,; \quad AB = 2 \times \frac{R}{2}\sqrt{3} = R\sqrt{3}\,; \quad OH = \frac{R}{2}.$$

Par suite:

$$c = R\sqrt{3} \; ; \; a = \frac{R}{2}$$

Résumé

Polygone régulier	*Angle au centre*	*Angle du polygone*	*côté*	*apothème*
Carré	90°	90°	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
Hexagone régulier	60°	120°	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
Triangle équilatéral	120°	60°	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$

(31e LEÇON)

45. Longueur d'un arc de cercle.

Considérons deux arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ d'un cercle de centre O (fig. 62).

Supposons que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ aient un sous-multiple commun contenu 3 fois dans $\widehat{AOB}$ et 4 fois dans $\widehat{COD}$.

En appliquant les théorèmes établis dans le cours de géométrie de deuxième année, il vient:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CD}} = \frac{\widehat{AOB}}{\widehat{COD}}$$

Dans un même cercle (ou dans deux cercles égaux) le rapport de deux angles au centre est égal au rapport des arcs qu'ils interceptent.

Soit alors l la longueur d'un arc d'un cercle de rayon R et désignons par α l'angle au centre associé à cet arc.

Si α est mesuré en degrés, il vient:

$$\frac{l}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360^\circ} \quad \text{ou} \quad \boxed{l = \frac{\pi\alpha}{180} R}$$

Si α est mesuré en grades:

$$\boxed{l = \frac{\pi\alpha}{200} R}$$

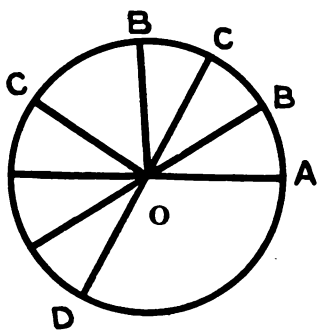

Fig. 62

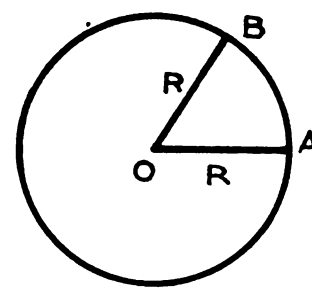

Fig. 63

46. Radian.

Au lieu de l'angle droit, choisissons comme unité d'angle l'angle au centre qui intercepte sur le cercle un arc dont la longueur est égale à celle du rayon R (fig. 63).

Cette nouvelle unité d'angle est appelée r a d i a n .

Un radian est l'angle au centre qui intercepte sur un cercle un arc dont la longueur est celle du rayon.

L'arc intercepté est un a r c d ' u n r a d i a n .

Le cercle entier a pour longueur $2\pi R$; il est donc intercepté par un angle 2π fois plus grand que le radian, ce qui veut dire que la mesure d'un angle de 360° exprimée en radians est égale à 2π.

A 2π radians correspondant 360°, à un radian correspondent

$$\frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Le calcul donne: 1 radian $\simeq 57^\circ 17' 44''$

(le signe $\simeq$ signifie «approximativement égal à»).

47. Longueur d'un arc mesuré en radians.

Par définition, la longueur d'un arc d'un radian est R.

Par suite, la longueur l d'un arc de α radians est:

$$l = \alpha R$$

Si $R = 1$, il vient:

$$l = \alpha.$$

RÉSUMÉ

Un polygone régulier convexe est un polygone convexe qui a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux.

Tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle et circonscriptible à un autre.

Ces deux cercles ont même centre.

Dans un même cercle (ou dans deux cercles égaux), le rapport de deux angles au centre est égal au rapport des arcs qu'ils interceptent.

Un radian est l'angle au centre qui intercepte sur un cercle un arc dont la longueur est celle du rayon.

EXERCICES ET PROBLÈMES

...**1.** — Soit un segment AB de 3 cm de longueur.
Construisez le cercle passant par A et B et tel que AB soit:

a) le côté du carré inscrit,

b) le côté de l'hexagone régulier inscrit,

c) le côté du triangle équilatéral inscrit.

2. — a) Soit AB le côté d'un carré inscrit dans un cercle. Montrez que: si I est le milieu du petit arc $\overset{\frown}{AB}$, AI est le côté de l'octogone régulier inscrit.

b) Déduisez-en le moyen de diviser un cercle en 8 parties égales.

c) Calculez en fonction de R le côté AI de l'octogone régulier inscrit, puis la longueur de l'apothème.

3. — Soit un cercle de 8 cm de rayon. Calculez le côté et l'apothème du carré circonscrit à ce cercle, puis le côté et l'apothème du carré inscrit.

4. Soit un cercle de rayon 4 cm et deux carrés respectivement inscrit et circonscrit à ce cercle et tels que les côtés de l'un soient parallèles aux côtés de l'autre.
Calculez les côtés et les diagonales de ces carrés.

5. — Soit un cercle de rayon 4 cm. Calculez le côté et l'apothème de l'hexagone régulier circonscrit à ce cercle, puis le côté et l'apothème de l'hexagone inscrit.

6. — Soit un cercle de rayon 4 cm. Calculez les côtés AB et A'B' des triangles équilatéraux ABC et A'B'C' respectivement inscrit et circonscrit à ce cercle.

7. — Calculez le rayon R d'un cercle circonscrit à un hexagone régulier en fonction de la longueur de l'apothème a.

8. — Soit un hexagone régulier ABCDEF. Les diagonales AD et BF se coupent en I. Montrez que: $3\,AI = DI$.
Les diagonales CE et DF se coupent en J. Montrez que: $JC = 2JE$ et que: $JF = 2JD$.

9. — Dans un triangle ABC, on donne: $BC = 5$ cm; $\hat{A} = 45°$; $\hat{B} = 120°$.

a) Calculez les côtés et les hauteurs du triangle.

b) Calculez le rayon du cercle circonscrit et montrez que AB, BC, CA sont les côtés de polygones réguliers inscrits dans ce cercle.

10. — Dans un cercle de 6 cm de rayon est inscrit un trapèze ABCD tel que les bases AB et CD soient respectivement le côté du triangle équilatéral inscrit et le côté de l'hexagone régulier inscrit.
Calculez les côtés AD et BC, la hauteur, les diagonales du trapèze.

11. — Soit un cercle de centre O et de rayon $R = 5$ cm.

a) Indiquez le moyen de mener une corde AB telle que l'arc qu'elle sous-tend soit égal à 150°.

b) Sur le plus grand des deux arcs $\overset{\frown}{AB}$, déterminez un point C tel que: si l'on abaisse la perpendiculaire CH sur AB, on ait $AH = CH$.

d) Calculez les mesures des arcs $\overset{\frown}{CB}$, $\overset{\frown}{AC}$, les longueurs des trois côtés et des trois hauteurs du triangle ABC.

12. — Calculez la mesure en radians des arcs suivants:

$$30°;\ 45°;\ 60°;\ 90°.$$

13. — Calculez la mesure en radians des arcs suivants:

$$63°;\ 83°;\ 87°30';\ 27\text{ gr};\ 42{,}50\text{ gr}.$$

14. — Calculez les mesures en degrés, puis en grades des arcs dont la mesure est donnée en radians:

$$\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}.$$

15. — Calculez les mesures en degrés, puis en grades des arcs dont la mesure est donnée en radians:

$$\frac{2\pi}{5};\ \frac{3\pi}{8};\ \frac{4\pi}{9}$$

Calculez la longueur d'un arc connaissant son rayon R et sa mesure α:

16. — $R = 125$ cm; $\alpha = 78°$.

17. — $R = 86$ cm; $\alpha = 62{,}42$ gr.

18. — $R = 172$ cm; $\alpha = \frac{\pi}{3}$ radian.

19. — $R = 120$ cm; $\alpha = 0{,}7$ radian.

DEUXIÈME PARTIE: GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

CHAPITRE I

DROITE ET PLAN

(1e LEÇON)

1. Notion de plan.

La surface d'un lac quand l'eau est absolument au repos, donne l'idée de p l a n.

La surface du tableau noir est une p o r t i o n d e p l a n.

Plaçons les extrémités de l'arête d'un règle juste sur le tableau noir: quelle que soit la position de la règle, tous les points de l'arête sont en contact avec le tableau.

2. Propriété fondamentale du plan.

Le plan est une surface telle que toute droite passant par deux points quelconques de cette surface y est contenue tout entière.

Une surface quelconque ne jouit pas de cette propriété.

Il est possible d'appliquer l'arête d'une règle sur une surface cylindrique, mais non d'une manière quelconque: la surface cylindrique n'est pas une surface plane.

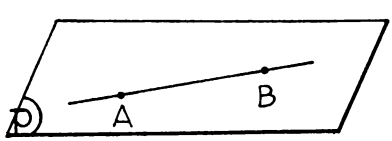

Fig. 1

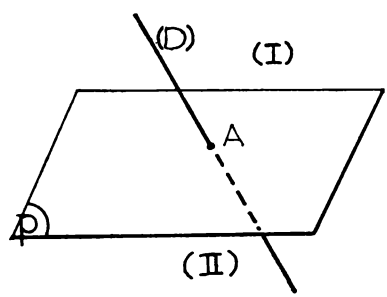

Fig. 2

La figure 1 est l'image d'un plan: c'est l'intérieur d'un rectangle représenté en perspective par un parallélogramme.

Une lettre, P par exemple, placée dans un des angles de la figure, permet de désigner le plan considéré.

Sur le plan P de la figure 1 sont situés les deux points distincts A et B ($A \subset P$ et $B \subset P$).

En vertu de la propriété fondamentale, toute la droite AB est contenue dans le plan P.

Ainsi qu'une droite, tout plan est illimité.

3. Demi-espace.

Un plan P sépare l'espace en deux régions, appelées demi-espaces (fig. 2).

Toute ligne joignant un point de la région I à un point de la région II doit traverser le plan.

Ainsi, la droite D traverse ou perce le plan P en A.

Le point A est appelé la trace de la droite sur le plan ou le point d'intersection de la droite et du plan.

4. Positions relatives d'une droite et d'un plan.

1°. Une droite dont deux points distincts sont situés sur un plan y est contenue tout entière.

Ainsi, la droite AB de la figure 1 est contenue dans le plan P.

On note:

$$D \subset P$$

et on lit: «droite D contenue dans le plan P».

2°. Une droite qui n'est pas contenue dans un plan peut avoir au plus un point situé sur ce plan.

En effet, si elle en avait deux, elle serait située dans ce plan.

La droite D de la figure 2 a un point et un seul commun avec le plan P.

On note:

$$D \cap P = A$$

et on lit: «D inter P égale A».

3°. Nous verrons plus loin qu'il existe des droites D n'ayant aucun point commun avec le plan P.

On dit que ces droites D sont p a r a l l è l e s au plan P.
On note:

$$D \cap P = \emptyset$$

et on lit: «D inter P égale ensemble vide».

De ce qui précède, il résulte qu'il existe trois positions relatives d'une droite et d'un plan.

(2e LEÇON)

5. Plan passant par trois points non alignés.

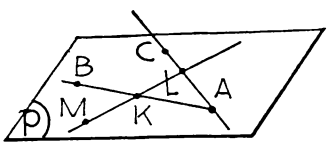

Fig. 3

Soit un plan P et trois points non alignés A, B, et C, situés sur ce plan (fig. 3).

On peut se demander s'il existe un plan P′, distinct de P et passant également par A, B et C.

Supposons qu'un tel plan P′ existe; les droites AB et AC, entièrement contenues dans le plan P (propriété fondamentale), seront, de même, entièrement contenues dans le plan P′.

Soit alors M un point quelconque du plan P.

Traçons dans ce plan une droite passant par M, coupant AB en K et AC en L.

Les points K et L, situés sur les droites AB et AC du plan P′, appartiennent au plan P′.

Par suite, la droite KL tout entière est dans le plan P′ et il en est de même du point M.

Ainsi, tout point du plan P est un point du plan P′.

On démontre de la même façon que tout point du plan P′ est un point du plan P.

Il en résulte que les plans P et P′ sont confondus.

Il existe un plan et un seul passant par trois points non alignés.

On dit que trois points non alignés d é t e r m i n e n t un plan.

6. Détermination d'un plan.

Considérons un plan P contenant une droite D et un point C non situé sur elle (fig. 4).

Les points A et B de la droite D appartiennent au plan P.

Tout autre plan P′ passant par la droite D et le point C contient, comme P, les trois points non alignés A, B,C et, de ce fait, est confondu avec le plan P.

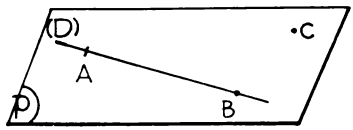

Fig. 4

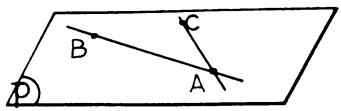

Fig. 5

Considérons, finalement, un plan P contenant deux droites concourantes AB et AC (fig. 5).

Tout autre plan P′ passant par AB et AC contient, comme P, les points non alignés A, B, C et, de ce fait, est confondu avec le plan P.

Un plan est déterminé:
- **par trois points non alignés,**
- **par une droite et un point extérieur à cette droite,**
- **par deux droites concourantes.**

7. Intersection de deux plans.

Lorsque deux plans ont en commun trois points non alignés, ils sont confondus.

Soit deux plans P et P′ distincts ayant deux points distincts A et B communs: la droite joignant ces deux points est commune aux deux plans.

Aucun point en dehors de la droite AB ne peut appartenir aux deux plans; sinon, ils seraient confondus (3° leçon).

Les plans P et P′, dans ce cas, sont dits s é c a n t s et la droite AB est l ' i n t e r s e c t i o n de ces deux plans.

On dit aussi que les deux plans se c o u p e n t suivant la droite AB.

On note:

$$P \cap P' = AB$$

Demandons-nous alors si deux plans distincts peuvent n'avoir qu'un seul point commun ?

Considérons deux plans distincts P et P′ ayant un point commun I (fig. 6).

Le plan P partage l'espace en deux demi-espaces I et II (1° leçon).

Traçons dans le plan P′ une droite xy perçant le plan P en I.

Soit K et L deux points de xy situés respectivement dans le demi-espace I et le demi-espace II.

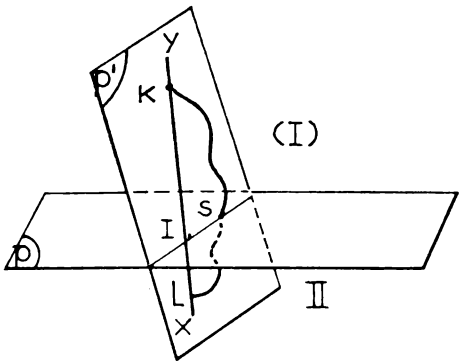

Fig. 6

Menons dans le plan P′ une ligne quelconque joignant K et L et ne passant pas par I.

Cette ligne doit percer le plan P en un point S, commun aux plans P et P′ (1e leçon).

Ce point S est un deuxième point commun aux plans P et P′.

La droite IS est donc commune aux plans P et P′ et ces deux plans n'ont pas d'autre point commun en dehors de cette droite.

Lorsque deux plans distincts ont un point commun, ils se coupent suivant une droite passant par ce point.

8. Positions relatives de deux plans.

Soit deux plans P et P′.

— S'ils ont trois points communs non alignés, ils sont **confondus.**

— S'ils sont distincts et ont un point commun, ils sont **sécants.**

— S'ils n'ont aucun point commun, ils sont **parallèles.**

Nous verrnos ultérieurement qu'il existe des plans P′ parallèles au plan P (8e leçon).

On note:

$$P \cap P' = \emptyset .$$

(3e LEÇON)

9. Positions relatives de deux droites de l'espace.

Remarquons d'abord que l'expression «deux droites de l'espace» veut dire que les deux droites considérées ne sont pas nécessairement situées sur un même plan.

Deux droites situées sur un même plan sont dites c o p l a n a i r e s; dans le cas contraire: n o n c o p l a n a i r e s.

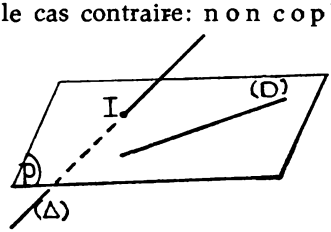

Fig. 7

Soit deux droites distinctes D et Δ (fig. 7) et I un point de Δ situé en dehors de la droite D.

Désignons par P le plan déterminé par D et I.

— Si Δ et D sont coplanaires, elles sont ou bien s é c a n t e s, ou bien p a r a l l è l e s (Géométrie, 2e année).

— Si Δ et D sont non coplanaires, Δ perce P au point I et, par suite, ces droites ne peuvent être ni sécantes ni parallèles: en effet, dans l'un et l'autre de ces cas, Δ et D seraient coplanaires ce qui est incompatible avec l'hypothèse.

10. Tétraèdre.

Soit quatre points A, B, C, D non situés sur un même plan et tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés (fig. 8).

Joignons ces points deux à deux de toutes les façons possibles.

La figure ainsi obtenue est appelée t é t r a è d r e .

Chacun des six segments AB, AC... etc. est une *a r ê t e* , chacun des quatre triangles ABC, ACD... etc, est une *f a c e* du tétraèdre ABCD.

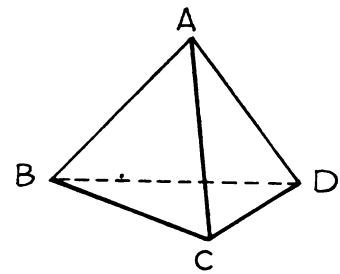

Fig. 8

Deux arêtes n'ayant aucune extrémité commune sont dites o p p o s é e s .

On voit facilement que le tétraèdre a trois couples d'arêtes opposées.

RÉSUMÉ

Le plan est une surface telle que toute droite passant par deux points quelconques de cette surface y est contenue tout entière.

Il existe un plan et un seul passant par trois points non alignés.

Un plan est déterminé:

— par trois points non alignés,

— par une droite et un point extérieur à cette droite,

— par deux droites concourantes.

Lorsque deux plans distincts ont un point commun, ils se coupent suivant une droite passant par ce point.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — Soit une droite D et un point A. Un point L décrit la droite D. Montrez que la droite AL engendre un plan P.

2. — Soit une droite D. Une droite D_1 reste parallèle à elle-même et rencontre constamment la droite D. Montrez que la droite D_1 engendre un plan P.

3. — Soit deux plans distincts P_1 et P_2. En combien de régions l'espace est-il partagé par ces deux plans ?

4. — On considère trois droites IA, IB, IC non coplanaires. Quel est le nombre des plans déterminés par ces trois droites ? En combien de régions l'espace est-il partagé par ces plans ?

5. — On considère quatre points A, B, C, D non coplanaires. Montrez que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés. Trouvez le nombre des plans déterminés par ces trois points pris trois à trois. Quelles sont les intersections de ces plans pris deux à deux ?

6. — On considère deux droites concourantes Ox et Oy dans un plan P. Une troisième droite D coupe Ox et Oy et n'appartient pas au plan P.
Démontrez que la droite D passe par O.

7. — On considère trois points A, B et C appartenant à la fois aux plans sécants P et Q. Démontrez que ces points sont alignés.

8. — On considère trois plans distincts P_1, P_2, P_3 contenant chacun les points M et N. Démontrez que ces plans sont concourants.

9. — Soit un triangle ABC; M_1, M_2, M_3 les milieux des côtés BC, CA, AB; I un point non situé dans le plan du triangle. Les points I, A, M déterminent un plan P; les points I, B, M_2 déterminent un plan P_1, les points I, C, M_3 déterminent un plan P_2. Démontrez que les intersections des plans P et P_1, d'une part, des plans P_1 et P_2, d'autre part, sont confondues.

10. — On considère deux droites D et D′ non coplanaires. A étant un point appartenant à D, A′ un point appartenant à D′, on désigne par P le plan déterminé par A et D′, par Q le plan déterminé par A′ et D.
Déterminez l'intersection des plans P et Q. M étant un point extérieur aux droites D et D′, construisez une droite passant par M et coupant les droites D et D′.

11. — On considère trois droites concourantes Ox, Oy, Oz non coplanaires. Un plan P_1 les coupe respectivement en A, B, C et un plan P_2 les coupe respectivement en A′, B′ et C′. Les plans P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ. Montrez que les droites AB et A′B′, AC et A′C′, BC et B′C′ sont alignées.

12. — On considère un tétraèdre ABCD. Soit E un point de AB, F un point de AC et G un point de BD. En supposant que EF et BC ne sont pas parallèles, construisez l'intersection des plans EFG et BCD ainsi que l'intersection de la droite CD et du plan EFG.

CHAPITRE II

PARALLÉLISME DE DROITES ET DE PLANS.

(4° LEÇON)

11. Droites parallèles.

Deux droites sont dites parallèles si:
1° elles sont situées dans un même plan;
2° elles n'ont aucun point commun.

Pour que deux droites soient parallèles, il faut qu'elles soient coplanaires car il existe dans l'espace des droites qui n'ont aucun point commun et qui pourtant ne sont pas dans un même plan.

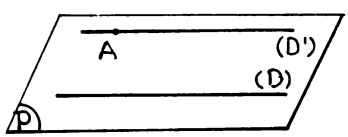

Fig. 9

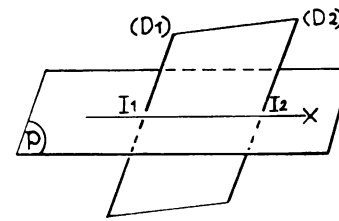

Fig. 10

1°. Considérons une droite D et un point A qui n'appartient pas à D (fig. 9).

La droite D et le point A déterminent un plan P.

En vertu du postulat d'Euclide, on peut mener dans le plan P une parallèle et une seule D' à la droite D.

Par un point A non situé sur une droite D, il passe une droite et une seule parallèle à la droite D (Théorème d'Euclide).

2°. Soit deux droites parallèles D_1 et D_2 et supposons qu'un plan P coupe la droite D_1 en un point I_1 (fig. 10).

Les droites D_1 et D_2 déterminent un plan Q car, parallèles, elles sont situées dans un même plan et un seul.

Les plans P et Q sont distincts puisque la droite D_1 du plan Q n'appartient pas au plan P.

Ainsi, les deux plans P et Q, distincts et ayant en commun un point I_1 se coupent suivant une droite I_1x distincte de D_1 (2e leçon).

Dans le plan Q, la droite I_1x coupant D_1 en I_1 coupe aussi D_2 parallèle à D_1 en I_2 (Géométrie, 2e année).

Le point I_2 est un point commun à la droite D_2 et au plan P.

C'est leur seul point commun: si D_2 et P avaient un point commun autre que I_2, les plans P et Q auraient un point commun situé en dehors de la droite d'intersection I_1x et seraient confondus.

Quand deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

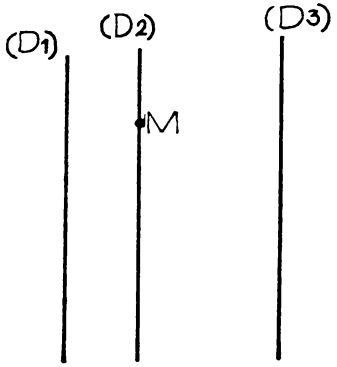

Fig. 11

3°. Nous nous proposons maintenant de démontrer que, lorsque deux droites distinctes D_1 et D_2 sont parallèles à une troisième D_3, elles sont parallèles entre elles (fig. 11).

Pour démontrer le parallélisme de D_1 et de D_2, il faut d'abord établir que ces deux droites appartiennent à un même plan.

Un point M de D_2 et la droite D_1 déterminent un plan P.

Si D_2 n'était pas contenue dans le plan P, celui-ci couperait D_2 en M et couperait D_3 qui lui est parallèle.

Mais alors, le plan P couperait aussi la droite D_1 qui est parallèle à D_3 ce qui est contraire à l'hypothèse d'après laquelle la droite D_1 appartient au plan P.

Les droites D_1 et D_2 sont donc situées dans un même plan.

Démontrons maintenant que les droites D_1 et D_2 n'ont aucun point commun.

Si D_1 et D_2 se coupaient en un point I, on pourrait mener par I deux parallèles distinctes à la droite D_3 ce qui est incompatible avec le théorème d'Euclide.

Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

On dit que les droites D_1, D_2 et D_3 ont même direction.

(5e LEÇON)

12. Droite et plan parallèles.

La figure 12 représente un plan P contenant une droite D′ et une droite D non contenue dans ce plan et parallèle à D′.

Nous nous demandons si, dans ces conditions, le plan P peut couper la droite D.

Si le plan P coupait la droite D, il couperait aussi sa parallèle D′ ce qui est impossible puisque, par hypothèse, D′ est contenue dans le plan P.

On en déduit:

Lorsqu'une droite D, non contenue dans un plan P, est parallèle à une droite D′ de ce plan, la droite D et le plan P n'ont aucun point commun.

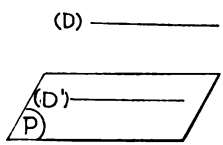

Fig. 12

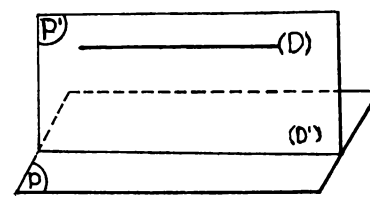

Fig. 13

On dit que la droite D est p a r a l l è l e au plan P.

Une droite D et un plan P sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

On note: $D \parallel P$.

Considérons une droite D parallèle au plan P ($D \parallel P$) et soit P′ un plan contenant D et coupant le plan P suivant la droite D′ (fig. 13).

Les droites D et D′ sont coplanaires: en effet, $D \in P'$ et $D' \in P'$.

Elles ne peuvent avoir de point commun ce qui serait incompatible avec l'hypothèse: $D \parallel P$.

Par suite: $D \parallel D'$.

Lorsqu'une droite D est parallèle à un plan P, elle est parallèle aux droites d'intersection du plan P et des plans contenant D.

Soit une droite D parallèle à un plan P (fig. 14) et menons par un point A de ce plan la parallèle D′ à la droite D.

Cette parallèle, est-elle contenue dans le plan P ?

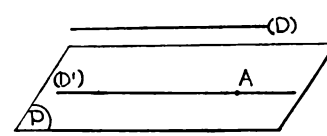

Fig. 14

Supposons que le plan P coupe D′ en A; il en résulterait que le plan P coupe D ce qui est contraire à l'hypothèse: D || P.

Si une droite est parallèle à un plan, toute parallèle à cette droite menée par un point quelconque du plan est située dans ce plan.

(6e LEÇON)

13. Droite parallèle à deux plans sécants.

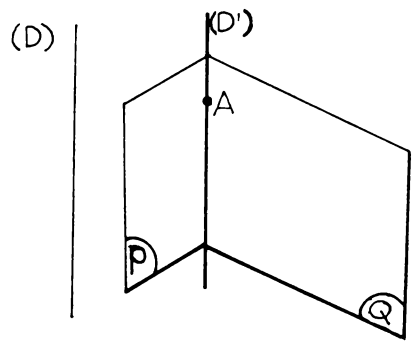

Fig. 15

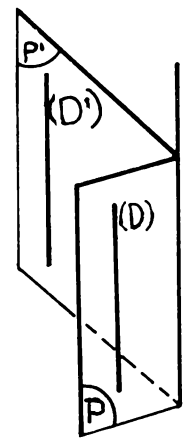

Fig. 16

Soit deux plans P et Q parallèles à la droite D (fig. 15).

Menons par le point A, commun aux plans P et Q la parallèle D′ à la droite D.

D'après le théorème précédent, cette parallèle est contenue à la fois dans le plan P et le plan Q: elle est donc confondue avec l'intersection de ces deux plans.

Si une droite est parallèle à deux plans sécants, elle est parallèle à leur intersection.

14. Plans sécants passant par deux droites parallèles.

Les plans P et P′ de la figure 16 passent respectivement par les droites parallèles D et D′.

Il résulte du théorème précédent que la droite d'intersection de ces deux plans est parallèle à D et à D′.

Lorsque deux plans sécants sont issus de deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces deux droites.

15. Plan parallèle à deux droites données.

Soit deux droites D_1 et D_2 et un point A extérieur à ces droites (fig. 17).

Existe-t-il des plans passant par A et parallèles aux deux droites données ?

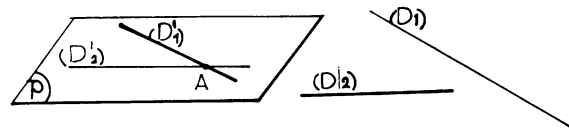

Fig. 17

Menons par A les droites D'_1 et D'_2, parallèles respectivement aux droites D_1 et D_2.

Si D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, les droites D'_1 et D'_2, distinctes, déterminent un plan P, parallèle aux droites D_1 et D_2.

Si D_1 et D_2 sont parallèles, les droites D'_1 et D'_2 sont confondues et tout plan passant par D'_1 (ou D'_2) est parallèle aux droites D_1 et D_2.

Il en résulte:

Par un point donné, on peut mener un plan et un seul parallèle à deux droites données non parallèles entre elles.

(7e LEÇON)

16. Angles dont les côtés sont respectivement parallèles.

Considérons deux angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'A'y'}$ tels que:

Ax et A'x' soient parallèles et de même sens,

Ay et A'y' soient parallèles et de même sens (fig. 18).

On sait que ces deux angles sont égaux s'ils sont situés dans un même plan.

Nous allons démontrer qu'ils sont encore égaux s'ils ne sont pas situés dans un même plan.

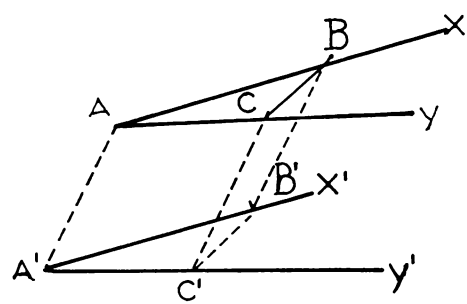

Fig. 18

Portons sur Ax et A'x' deux segments AB et A'B' tels que: AB = A'B'.

Portons de même sur Ay et A'y' deux segments AC et A'C' tels que: AC = A'C'.

On voit aisément que les quadrilatères ABB'A' et ACC'A' sont des parallélogrammes: en effet, les segments AB et A'B' sont parallèles, égaux, de même sens et il en est de même des segments AC et A'C'.

On en déduit:

$$\left.\begin{matrix} BB' = AA' \\ CC' = AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB' = CC' \; ; \qquad \left.\begin{matrix} BB' \parallel AA' \\ CC' \parallel AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB' \parallel CC' \text{ (4e leçon).}$$

BB′ et CC′ étant égaux et parallèles, le quadrilatère BCC′B′ est un parallélogramme et par suite: BC = B′C′.

Ainsi, les triangles ABC et A′B′C′ ont leur trois côtés respectivement égaux: ils sont égaux (3e cas d'égalité des triangles).

Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{B'A'C'}$ sont donc égaux.

Lorsque deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles et de même sens, ils sont égaux.

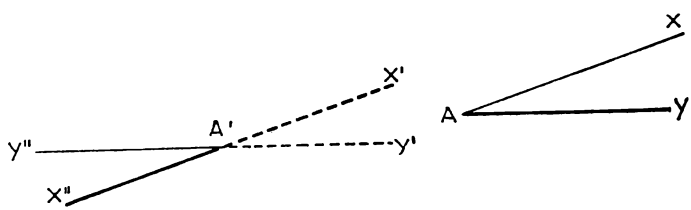

Fig. 19

Considérons deux angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x''A'y''}$ tels que:
Ax et A′x″ soient parallèles et de sens contraires,
Ay et A′y″ soient parallèles et de sens contraires (fig. 19).
A′x′ et A′y′ étant les prolongements respectifs de A′x″ et de A′y″, les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'A'y'}$ sont égaux en vertu du théorème précédent.

Comme $\widehat{x''A'y''} = \widehat{x'A'y'}$ (angles opposés par le sommet), il vient:

$$\widehat{xAy} = \widehat{x''A'y''}.$$

Lorsque deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles et de sens contraires, ils sont égaux.

Considérons finalement les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x''A'y'}$.
Les côtés Ay et A′y′ sont parallèles et de même sens, les côtés Ax et A′x″ sont parallèles et de sens contraires (fig. 19).

Les angles $\widehat{x'A'y'}$ et $\widehat{x''A'y'}$ étant supplémentaires, les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{x''A'y'}$ sont aussi supplémentaires.

Lorsque deux angles ont deux côtés parallèles et de même sens et les deux autres parallèles et de sens contraires, ils sont supplémentaires.

17. Angles de deux droites.

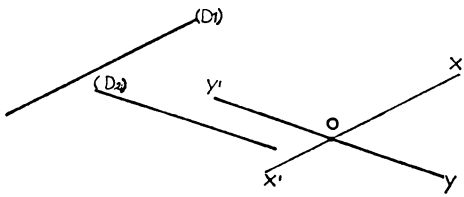

Fig. 20

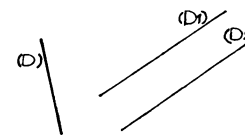

Fig. 21

On appelle angle de deux droites de l'espace, l'un quelconque des angles formés par les parallèles à ces droites passant par un point quelconque de l'espace.

Soit deux droites D_1 et D_2 de l'espace (fig. 20).

Menons par un point O les droites x'x et y'y respectivement parallèles à D_1 et D_2.

Nous avons vu plus haut que les angles formés par x'x et y'y ne dépendent pas du choix du point O.

Pour déterminer l'angle des droites D_1 et D_2, on peut choisir le point O sur l'une de ces droites.

Remarquons que l'angle de deux droites ne change pas lorsqu'on remplace l'une d'elles par une parallèle.

18. Droites orthogonales. Droites perpendiculaires.

Deux droites sont dites orthogonales lorsque leur angle est droit.

Nous convenons de dire que deux droites sont perpendiculaires si elles sont coplanaires et orthogonales c'est-à-dire si, situées dans un même plan, elles forment un angle droit.

Soit deux droites parallèles D_1 et D_2 et une droite D orthogonale à D_1 (fig. 21).

D'après la remarque du paragraphe précédent, la droite D est également orthogonale à la droite D_2.

Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

RÉSUMÉ

Deux droites sont dites parallèles si:

1° elles sont situées dans un même plan;

2° elles n'ont aucun point commun.

Par un point A non situé sur une droite D, il passe une droite et une seule parallèle à la droite D.

Quand deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

Lorsqu'une droite D, non contenue dans un plan P, est parallèle à une droite D′ de ce plan, la droite D et le plan P n'ont aucun point commun.

Lorsqu'une droite D est parallèle à un plan P, elle est parallèle aux droites d'intersection du plan P et des plans contenant D.

Si une droite est parallèle à un plan, toute parallèle à cette droite menée par un point quelconque du plan est située dans ce plan.

Si une droite est parallèle à deux plans sécants, elle est parallèle à leur intersection.

Lorsque deux plans sécants sont issus de deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces deux droites.

Par un point donné, on peut mener un plan et un seul parallèle à deux droites données non parallèles entre elles.

Deux angles, ayant leurs côtés repectivement parallèles et de même sens, sont égaux.

Deux angles, ayant leurs côtés respectivement parallèles et de sens contraires, sont égaux.

Deux angles ayant deux de leurs côtés parallèles et de même sens et les deux autres parallèles et de sens contraires, sont supplémentaires.

On appelle angle de deux droites de l'espace, l'un quelconque des angles formés par les parallèles à ces droites passant par un point quelconque de l'espace.

Deux droites sont dites orthogonales lorsque leur angle est droit.

Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — Soit un quadrilatère gauche ABCD et M, N, K, L les milieux respectifs des côtés AB, BC, CD, DA («gauche» veut dire que les quatre sommets du quadrilatère ne sont pas situés sur un même plan). Démontrez que MNKL est un parallélogramme. Dans quelles conditions ce parallélogramme est-il un rectangle ? un losange ? un carré ?

2. — Soit un quadrilatère gauche ABCD dont les côtés opposés AC et BD sont égaux. M étant le milieu de AB, N le milieu de CD, démontrez que les côtés AC et BD font des angles égaux avec la droite MN.

3. — Soit deux droites D_1 et D_2 non situées dans un même plan. Construisez le plan P passant par D_1 et parallèle à D_2.

4. — Soit un plan P, un segment AB de ce plan et un point L hors de P. Sur les segments LA et LB, marquez les points M et N tels que: $\frac{LM}{LB} = \frac{LN}{LB} = \frac{1}{4}$. Démontrez que la droite MN est parallèle au plan P. Que décrivent les points M et N quand le point L décrit une droite parallèle au plan P ?

5. — Soit deux droites distinctes D_1 et D_2 parallèles à la droite D. Ces trois droites n'étant pas coplanaires, démontrez qu'il n'existe pas de droite coupant les trois droites données.

6. — Soit deux droites parallèles D_1 et D_2 et D une droite coupant le plan déterminé par D_1 et D_2. Démontrez qu'il existe une infinité de droites coupant les droites données.

7. — On considère deux droites parallèles D′ et D″ et un point L extérieur au plan déterminé par ces droites. Démontrez que la parallèle à D′ issue de L est à la fois dans le plan déterminé par L et D′ et dans le plan déterminé par O et D″. Quelle est l'intersection de ces deux plans ?

8. — On considère un tétraèdre ABCD et on marque sur les arêtes AB, AC, AD les points M, N, K tels que: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AK}{AD} = k$. Démontrez que les triangles BCD et MNK sont semblables. Quelles sont les figures décrites par les milieux des côtés du triangle MNK lorsque le nombre k varie ?

9. — On considère deux plans sécants P et P′ et un point I extérieur à ces plans. Construisez une droite passant par I et parallèle aux plans donnés.

10. — On considère deux plans sécants P et P′ tels qu'une droite D de l'un est parallèle à une droite D′ de l'autre. Que peut-on dire de l'intersection des plans P et P′ ?

11. — On considère deux plans P et P′ qui se coupent suivant la droite Δ. Par un point I donné, on mène la parallèle D à Δ et une droite D_1 qui coupe les plans P et P′ en A et A′. Démontrez que l'intersection des plans P et P′ avec le plan Q déterminé par D et D_1 sont parallèles à Δ.

12. — On considère deux plans P et P′ et une direction Δ non parallèle à P et non parallèle à P′. Soit A, B, C trois points du plan P. Les parallèles à Δ menées par les points A, B, C rencontrent le plan P′ en A′, B′, C′. On désigne par α, β, γ les milieux des côtés BC, CA, AB du triangle ABC, et par α′, β′, γ′ les milieux des côtés B′C′, C′A′, A′B′ du triangle A′B′C′. Démontrez que les droites αα′, ββ′, γγ′ sont parallèles à Δ. G et G′ étant les centres de gravité des triangles ABC et A′B′C′, démontrez que la droite GG′ est parallèle à Δ.

CHAPITRE III

PLANS PARALLÈLES

(8e LEÇON)

19. Plans n'ayant aucun point commun.

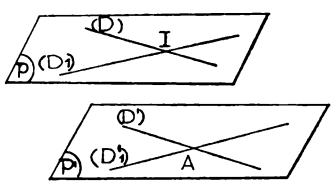

Fig. 22

Considérons deux droites D et D_1 concourantes en un point I: elles déterminent un plan P (fig. 22).

Par le point A non situé sur le plan P, menons les droites D′ et D'_1 respectivement parallèles aux droites D et D_1.

Les droites D′ et D'_1 ne sont pas confondues sinon les droites D et D_1 seraient parallèles à une même droite et, de ce fait, confondues.

Il en résulte que D′ et D'_1 déterminent un plan P′.

Nous nous proposons de démontrer que les plans P et P′ n'ont aucun point commun.

Si P et P′ avaient un point commun, leur intersection passant par ce point commun serait simultanément parallèle à la droite D′ et à la droite D'_1 (5e leçon), ce qui est impossible (théorème d'Euclide).

Les plans P et P′ n'ont donc aucun point commun.

On dit que les plans P et P′ sont parallèles et on note:

$$P \parallel P'.$$

Deux plans parallèles sont deux plans qui n'ont aucun point commun.

La démonstration faite plus haut permet d'énoncer le théorème suivant:

Si, par un point non situé dans un plan P, on trace deux droites respectivement parallèles à deux droites concourantes de ce plan, ces droites déterminent un plan P′ parallèle au plan P.

D'ailleurs: toute droite Δ du plan P′ est parallèle au plan P sinon le

point d'intersection de Δ et de P serait commun aux plans P et P′, ce qui est impossible puisque ces plans sont parallèles.

Ainsi:

Si deux plans sont parallèles, toute droite contenue dans l'un des plans est parallèle à l'autre.

20. Théorème d'unicité.

Soit un plan P et un point A extérieur à ce plan (fig. 23).

Pour construire un plan P′ passant par A et parallèle au plan P, il suffit de mener par A les droites D′ et D'_1 respectivement parallèles aux droites concourantes D et D_1 du plan P.

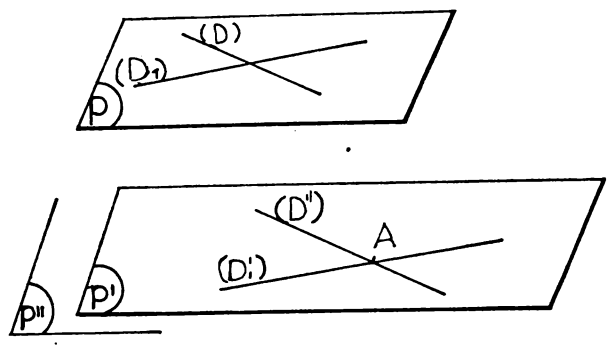

Fig. 23

Démontrons que P′ est le seul plan passant par A et parallèle au plan P.

Supposons qu'il existe un autre plan P″ passant par A et parallèle au plan P.

Le plan P″ doit contenir la droite D′; sinon, il la couperait en A et, de ce fait, couperait la droite D parallèle à D′: ainsi, P″ couperait P ce qui est incompatible avec l'hypothèse suivant laquelle les plans P″ et P sont parallèles.

On démontre de la même façon que le plan P″ contient la droite D'_1: on en déduit qu'il est confondu avec le plan P′.

Par un point extérieur à un plan P, on peut mener à ce plan un plan parallèle et un seul.

(9e LEÇON)

21. Théorèmes résultant du théorème d'unicité.

Premier théorème.

Soit deux plans P et Q distincts et parallèles à un même plan R (fig. 24). On démontre que ces plans P et Q sont parallèles:

si les plans P et Q se coupaient, on pourrait mener par un point quel-

conque de la droite d'intersection deux plans parallèles au plan R, ce qui est incompatible avec le théorème d'unicité.

Deux plans distincts P et Q parallèles à un même plan R, sont parallèles.

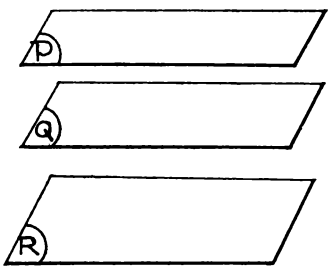

Fig. 24

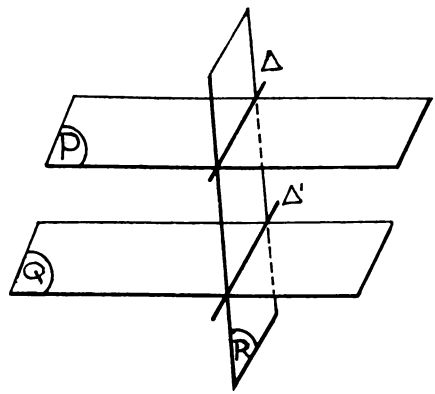

Fig. 25

Deuxième théorème.

Soit deux plans parallèles P et Q et un plan R coupant le plan P (fig. 25).

R ne peut être parallèle à Q: sinon, par un point quelconque de la droite d'intersection Δ de P et R on pourrait mener deux plans parallèles au même plan Q, ce qui est incompatible avec le théorème d'unicité.

Les plans P et Q sont donc sécants.

Soit Δ' la droite d'intersection des plans R et Q.

Les droites Δ et Δ' sont parallèles.

En effet, contenues dans un même plan R, elles n'ont aucun point commun: sinon, ce point serait situé sur les plans P et Q qui sont parallèles.

Lorsque deux plans P et Q sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Troisième théorème.

Soit un plan P et un point I extérieur à ce plan (fig. 26).

Menons par I le plan P′ parallèle au plan P.

Une droite D passant par I et parallèle au plan P est contenue dans le plan P′.

En effet: le plan P contenant une infinité de droites parallèles à D, si le plan P′ coupait D en I, ce même plan couperait toutes ces parallèles à D, ce qui est impossible puisque P et P′ sont parallèles.

Ainsi, toute droite passant par I et parallèle au plan P est contenue dans le plan P′.

D'autre part, toute droite passant par I et contenue dans le plan P′ est parallèle au plan P.

On en déduit:

L'ensemble des droites passant par un point I et parallèles à un plan P est le plan P′ mené par I parallèlement à P.

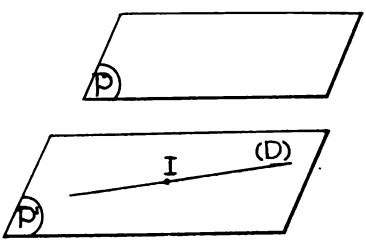

Fig. 26

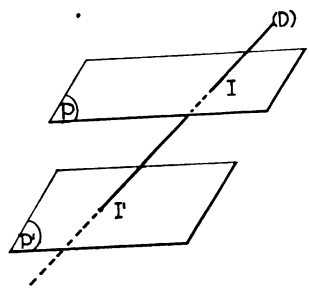

Fig. 27

Quatrième théorème.

La figure 27 représente deux plans parallèles P et P′ et une droite D perçant le plan P en I.

La droite D n'est pas parallèle au plan P′: sinon, elle serait contenue dans le plan P d'après le théorème précédent.

Elle n'est pas située dans le plan P′: car le point I est en dehors du plan P′.

La droite D perce donc le plan P′.

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.

Cinquième théorème.

La figure 28 représente deux plans parallèles P et P′ et une droite D parallèle au plan P.

La droite D ne peut pas percer le plan P′: sinon, elle couperait aussi le plan P.

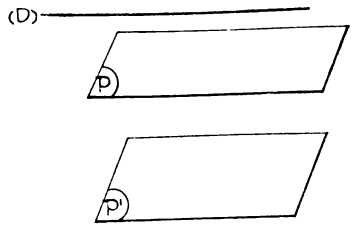

Fig. 28

Elle est donc parallèle au plan P′ ou contenue dans ce plan.

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ou contenue dans l'autre.

(10e LEÇON)

22. Segments de droites parallèles limités à deux plans parallèles.

Les droites parallèles D_1, D_2, D_3 coupent les plans parallèles P et P′ respectivement en A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3 (fig. 29).

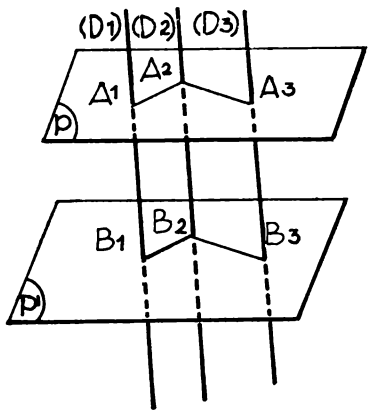

Fig. 29

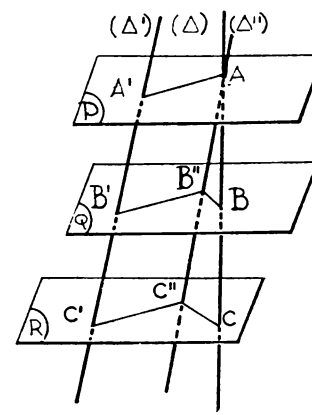

Fig. 30

Les droites D_1 et D_2 sont dans un même plan et il en est de même des droites D_2 et D_3 (4e leçon).

Ces deux plans coupent les plans P et P′ suivant des droites respectivement parallèles.

Par suite: le segment A_1A_2 est parallèle au segment B_1B_2, le segment A_2A_3 est parallèle au segment B_2B_3.

Les quadrilatères $A_1B_1B_2A_2$ et $A_2B_2B_3A_3$ sont donc des parallélogrammes et il en résulte:

$$A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 .$$

Les segments de droites parallèles limités à deux plans parallèles sont égaux.

23. Extension à l'espace du théorème de Thalès.

Soit deux droites Δ et Δ' (coplanaires ou non coplanaires) et trois plans parallèles P, Q, R coupant la première droite Δ respectivement en A, B, C et la deuxième Δ' en A', B', C' (fig. 30).

Soit Δ'' la droite parallèle à Δ' et passant par le point A: elle rencontre les plans Q et R respectivement en B'' et C''.

Les droites BB'' et CC'' sont dans le plan $\Delta\Delta''$ et sont parallèles (9e leçon).

En appliquant le théorème de Thalès au triangle ACC'' (Géométrie plane, 3e année), il vient:

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{BC}{B''C''} = \frac{AC}{AC''}.$$

Or, $AB'' = A'B'$, $B''C'' = B'C'$ et $AC'' = A'C'$ (segments de droites parallèles limités à deux plans parallèles).

Il en résulte:

$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}}$$

Plusieurs plans parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants proportionnels.

Les points A et A', appartenant l'un à Δ, l'autre à Δ', et situés dans le même plan P, sont dits homologues.

B et B', C et C' sont également des points homologues.

Les segments AB et A'B', appartenant l'un à Δ, l'autre à Δ', et compris entre les deux plans parallèles P et Q, sont dits homologues ou correspondants.

Les segments BC et B'C' d'une part, les segments AC et A'C' d'autre part, sont également des segments homologues ou correspondants.

Le théorème précédent peut alors être énoncé de la façon suivante:

Lorsque deux droites sont coupés par plusieurs plans parallèles, le rapport de deux segments déterminés sur l'une est égal au rapport des deux segments homologues déterminés sur l'autre.

RÉSUMÉ

Deux plans parallèles sont deux plans qui n'ont aucun point commun.

Si, par un point non situé dans un plan P, on trace deux droites respectivement parallèles à deux droites concourantes de ce plan, ces droites déterminent un plan P′ parallèle au plan P.

Si deux plans sont parallèles, toute droite contenue dans l'un des plans est parallèle à l'autre.

Par un point I extérieur à un plan P, on peut mener à ce plan un plan parallèle et un seul.

Deux plans distincts P et Q parallèles à un même plan R, sont parallèles.

Lorsque deux plans P et Q sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

L'ensemble des droites passant par un point I et parallèles à un plan P est le plan P′ mené par I parallèlement à P.

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre.

Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ou contenue dans l'autre.

Les segments de droites parallèles limités à deux plans parallèles sont égaux.

Plusieurs plans parallèles déterminent sur deux sécantes quelconques des segments correspondants proportionnels.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — Soit deux plans P et Q parallèles, une droite D non située dans ces plans et un point I. Construisez un plan parallèle à la droite D et passant par I, coupant les plans P et Q suivant deux droites parallèles.

2. — Soit deux plans parallèles P et Q et un point I en dehors de ces plans. On considère un parallélogramme ABCD du plan P. Les droites IA, IB, IC, ID perçant le plan Q respectivement aux points A′, B′, C′, D′, quelle est la nature du quadrilatère A′B′C′D′ ?

3. — On considère deux plans parallèles P et P′. Par un point I non situé dans ces plans, on mène trois droites, non coplanaires, rencontrant respectivement les plans P et P′ en K, L, M et K′, L′ M′. Démontrez que les triangles KLM et K′L′M′ sont semblables.

4. — Soit un plan P, un point I et une droite Δ non parallèle à P. Construisez une droite passant par I, parallèle au plan P et qui coupe la droite Δ.

5. — Soit un plan P et trois points A, B, C non alignés de ce plan. I étant un point extérieur au plan P, on considère les points A', B', C' situés respectivement sur les droites IA, IB, IC et tels que l'on ait: $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC'}}{\overline{SC}} = \frac{1}{3}$. Démontrez que les points A', B', C' déterminent un plan P' parallèle au plan P.

6. — Soit un tétraèdre OABC tel que: OA = OB = OC. On construit les bissectrices extérieures des angles en O des triangles OAB, OAC et OBC.
Démontrez que ces bissectrices appartiennent au plan passant par O et parallèle au plan ABC.

7. — Soit trois droites concourantes Ix, Iy, Iz non coplanaires. Construisez le plan passant par un point donné S et parallèle aux droites Ix et IY. Démontrez que la droite Iz coupe le plan ainsi obtenu.

8. — Deux droites D et Δ coupent le plan P en M et N. Un plan P' parallèle au plan P coupe respectivement D et Δ en M' et N'. Démontrez que M'N' est parallèle au plan P. Prolongez MM' d'un segment M'M'' = MM' et NN' du segment N'N' = NN'. Démontrez que la droite M''N'' est parallèle au plan P.

CHAPITRE IV

DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES

(11e LEÇON)

24. Droite perpendiculaire à un plan.

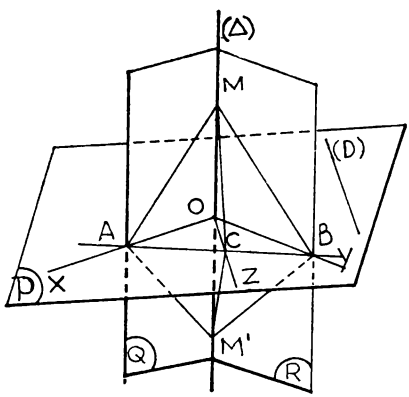

Fig. 31

Considérons deux plans Q et R, se coupant suivant la droite Δ (fig. 31).

Soit Ox une droite du plan Q, Oy une droite du plan R perpendiculaires toutes deux en O à Δ.

Ox et Oy ne sont pas confondues sinon les plans Q et R le seraient; elles sont donc concourantes et déterminent un plan P.

Ainsi, Δ est une droite perpendiculaire à deux droites concourantes du plan P.

Elle coupe le plan P en O: en effet, si Δ était contenue dans P, on pourrait dans un plan mener par un point O d'une droite deux perpendiculaires à cette droite.

Nous nous proposons de démontrer que Δ est orthogonale à toutes les droites du plan P.

Soit D une droite quelconque du plan P et Oz la parallèle à D passant par O.

Marquons sur Δ deux points M et M′ tels que: OM = OM′ et menons, dans le plan P, une droite coupant Ox en A, Oy en B et Oz en C.

Ox est médiatrice du segment MM′ et il en est de même de Oy.

Il en résulte: AM = AM′ et BM = BM′.

Les triangles MAB et M′AB sont donc égaux (3e cas d'égalité).

Comparons les triangles MAC et M′AC.

Ils ont: AC commun, AM = AM′ et $\widehat{MAC} = \widehat{M'AC}$ (angles homologues des triangles égaux MAB et M′AB).

Les triangles MAC et M′AC sont donc égaux (2e cas) et CM = CM′.

OC est alors médiatrice de MM′ et, par suite, la droite Oz est perpendiculaire à la droite Δ.

Ainsi, la droite Δ est orthogonale à toutes les droites du plan P.

On dit qu'elle est perpendiculaire au plan P.

On dit aussi que le plan P est perpendiculaire à Δ ou encore que Δ et P sont perpendiculaires.

Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

La démonstration précédente permet d'énoncer le théorème suivant:

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

La figure 32 représente deux droites concourantes Ox et Oy du plan P et une droite Δ orthogonale à chacune d'elles.

Menons par O la droite Δ′ parallèle à Δ; Δ′ est perpendiculaire à Ox et à Oy (7e leçon) et, en vertu du théorème précédent, perpendiculaire au plan P.

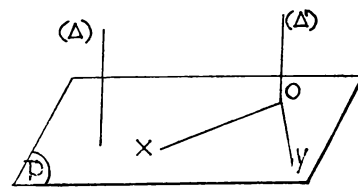

Fig. 32

Ainsi, Δ′ étant orthogonale à toutes les droites du plan P, la droite Δ qui lui est parallèle, est aussi orthogonale à toutes ces droites (7e leçon).

La droite Δ est donc perpendiculaire au plan P.

Lorsqu'une droite est orthogonale à deux droites concourantes d'un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

(12e LEÇON)

25. Conséquences.

Premier théorème.

Considérons deux plans parallèles P et P′ et soit Δ une droite perpendiculaire au plan P (fig. 33).

D′ étant une droite quelconque du plan P′, menons par un point I du plan P la parallèle D à D′.

La droite D est contenue dans le plan P′ (8e leçon).

La droite Δ est orthogonale à D et, par suite, orthogonale à D′ (7e leçon).

La droite Δ, orthogonale à toute droite D′ du plan P, est perpendiculaire à ce plan.

Si deux plans P et P′ sont parallèles, toute droite Δ perpendiculaire au plan P est aussi perpendiculaire au plan P′.

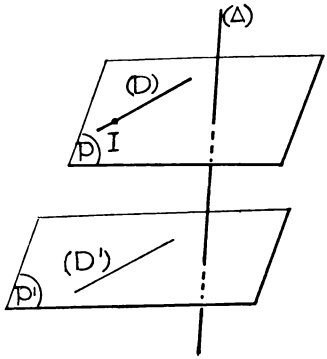

Fig. 33

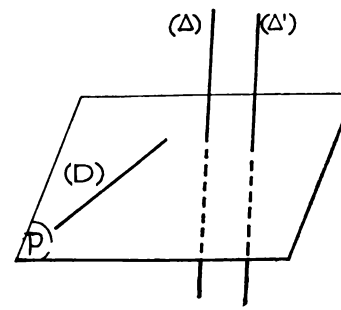

Fig. 34

Deuxième théorème.

Considérons deux droites parallèles Δ et Δ′ et un plan P perpendiculaire à Δ (fig. 34).

Soit D une droite quelconque du plan P.

Elle est orthogonale à Δ et, par suite, à Δ′.

La droite Δ′ est donc orthogonale à toute droite du plan P: elle est perpendiculaire au plan P.

Si deux droites Δ et Δ′ sont parallèles, tout plan perpendiculaire à Δ est aussi perpendiculaire à Δ′.

26. Plan perpendiculaire à une droite Δ et passant par un point donné.

Nous nous proposons de construire un plan perpendiculaire à une droite Δ et passant par un point O situé sur cette droite (fig. 35).

A cet effet, faisons passer par Δ deux plans distincts Q et R.

Construisons dans le plan Q la droite Ox perpendiculaire à Δ et, dans le plan R, la droite Oy perpendiculaire à Δ.

Nous avons vu plus haut que Δ est orthogonale à toute droite du plan P déterminé par Ox et Oy, c'est-à-dire que Δ est perpendiculaire à P.

On peut se demander s'il existe un plan P′ distinct de P et qui, passant par O, serait également perpendiculaire à Δ.

Nous allons démontrer qu'un tel plan doit contenir Ox et Oy et, par suite, être confondu avec le plan P.

Supposons que le plan P′ ne contienne pas, par exemple, la droite Ox: il couperait alors le plan Q suivant une droite Ox′ distincte de Ox et perpendiculaire à Δ.

Cela est impossible car on ne peut mener par un même point O, dans un même plan Q, deux perpendiculaires à une même droite Δ.

La droite Ox appartient donc au plan P′ et il en est de même de la droite Oy.

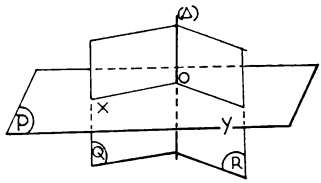

Fig. 35

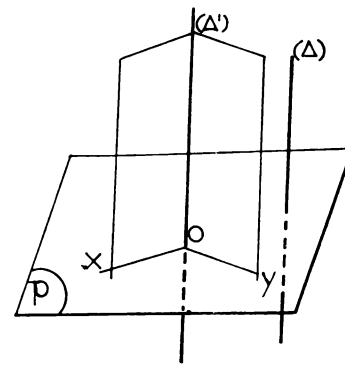

Fig. 36

Si le point O n'est pas situé sur la droite Δ (fig. 36), menons par O la parallèle Δ' à Δ et, comme nous l'avons fait plus haut, construisons le plan P perpendiculaire à Δ' en O.

Nous savons que P, perpendiculaire à Δ', est perpendiculaire à toute parallèle à Δ' et en particulier à Δ.

P est le seul plan passant par O et perpendiculaire à Δ.

En effet, s'il existait un plan P′, distinct de P, passant par O et perpendiculaire à Δ, ce plan P′ serait également perpendiculaire à Δ' parallèle à Δ et il existerait deux plans distincts, passant par le point O de la droite Δ' et perpendiculaire à cette droite; cela est impossible comme nous l'avons vu plus haut.

Il résulte de ce qui précède:

Par un point donné, on peut mener un plan et un seul perpendiculaire à une droite donnée.

A l'aide de ce théorème on démontre facilement que deux plans distincts perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Si ces plans avaient un point commun, on pourrait mener par ce point deux plans perpendiculaires à une même droite ce qui est impossible.

Deux plans distincts perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

(13e LEÇON)

27. Droite perpendiculaire à un plan et passant par un point donné.

Nous nous proposons de construire une droite perpendiculaire à un plan en un point O de ce plan (fig. 37).

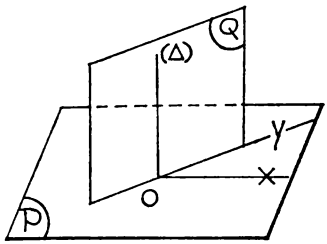

Fig. 37

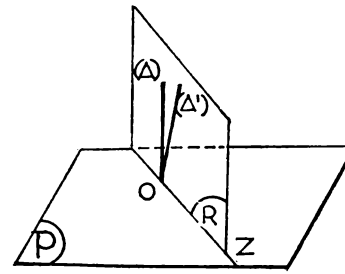

Fig. 38

Traçons la droite Ox dans le plan P et construisons, comme nous l'avons fait plus haut, le plan Q passant par O et perpendiculaire à Ox; ce plan Q coupe le plan P suivant une droite Oy.

Construisons dans le plan Q la droite Δ passant par O et perpendiculaire à Oy.

La droite Δ est perpendiculaire à Ox, car Ox est perpendiculaire au plan Q.

Comme Δ est aussi perpendiculaire à Oy, la droite Δ perpendiculaire à deux droites concourantes du plan P est perpendiculaire à ce plan.

Il est facile de voir que Δ est la seule droite perpendiculaire au plan P et passant par le point O.

En effet: s'il existait une deuxième droite Δ′, distincte de Δ et perpendiculaire en O au plan P (fig. 38), les droites Δ et Δ′ détermineraient un plan R coupant le plan P suivant une droite Oz et il existerait dans le plan R deux droites Δ et Δ′ perpendiculaires à Oz en O ce qui est impossible.

Si le point O n'appartient pas au plan P (fig. 39), menons par ce point

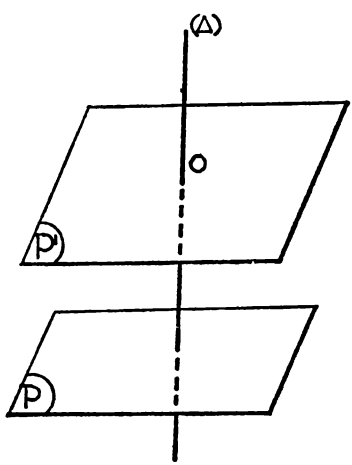

Fig. 39

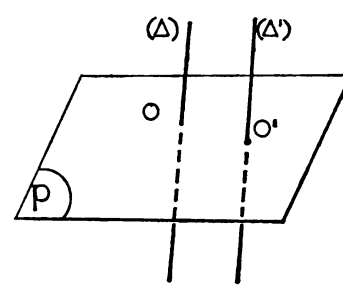

Fig. 40

le plan P′ parallèle au plan P et construisons la droite Δ perpendiculaire en O à P′.

Nous savons que Δ est aussi perpendiculaire au plan P (12e leçon).

Il est facile de voir que Δ est la seule droite perpendiculaire au plan P et passant par le point O.

En effet: s'il existait une deuxième droite Δ′ perpendiculaire en O au plan P et distincte de Δ, Δ′ serait également perpendiculaire au plan P′ et il passerait par un point O du plan P′ deux perpendiculaires à ce plan ce qui est impossible d'après la démonstration faite plus haut.

Par un point donné, on peut mener une droite et une seule perpendiculaire à un plan donné.

Conséquence.

Soit Δ et Δ′ deux droites distinctes perpendiculaires au plan P (fig. 40).

Menons par O′, intersection de Δ′ et de P, la parallèle à la droite Δ; elle est perpendiculaire au plan P et, d'après le théorème précédent, confondue avec la droite Δ′.

Il en résulte:

Deux droites distinctes, perpendiculaires à un même plan, sont parallèles.

RÉSUMÉ

Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

Lorsqu'une droite est orthogonale à deux droites concourantes d'un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

Si deux plans P et P′ sont parallèles, toute droite Δ perpendiculaire au plan P est aussi perpendiculaire au plan P′.

Si deux droites Δ et Δ′ sont parallèles, tout plan perpendiculaire à Δ est aussi perpendiculaire à Δ′.

Par un point donné, on peut mener un plan et un seul perpendiculaire à une droite donnée.

Deux plans distincts perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Par un point donné, on peut mener une droite et une seule perpendiculaire à un plan donné.

Deux droites distinctes perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — Par un point I d'un plan P, on mène la demi-droite Ix perpendiculaire à ce plan et une demi-droite Oy oblique. Démontrez: 1° que si Ix et Iy sont dans le même demi-espace, l'angle $\widehat{xIy}$ est aigu; 2° que si l'angle $\widehat{xIy}$ est aigu, Ox et Oy sont dans le même demi-espace.

2. — On considère deux segments égaux MM′ et NN′, perpendiculaires en M et N à un plan P et de même sens. Démontrez que MM′NN′ est un rectangle.

3. — On considère un quadrilatère KLMN. On mène les segments égaux KK′, LL′, MM′, NN′ perpendiculaires au plan du quadrilatère et d'un même côté par rapport à son plan. Démontrez que le solide KLMNK′L′M′N′ est limité par quatre rectangles et par deux polygones égaux situés dans des plans parallèles. Quelle doit être la nature du quadrilatère KLMN pour obtenir un parallélépipède rectangle ? un cube ?

4. — Une droite D perce un plan P au point I qui détermine sur elle les demi-droites It et It′. On suppose que la demi-droite It fait des angles égaux avec les trois demi-droites Ix, Iy, Iz du plan P. On porte sur ces trois demi-droites des segments égaux IA, IB, IC. Soit O un point de It. Démontrez que l'on a OA = OB = OC et que la droite D est perpendiculaire au plan P.

5. — On considère une droite D et un point O extérieur à cette droite. Soit un plan P passant par D et O′ le pied de la perpendiculaire menée par O à ce plan. Que décrit le point O′ lorsque P tourne autour de D ?

6. — On considère deux droites Δ et Δ' perpendiculaires au plan P respectivement en M et N. Par un point I du plan P non situé sur MN, on mène la droite xy parallèle à MN et par xy un plan R qui coupe Δ et Δ' respectivement en K et L. Démontrez que KL est parallèle au plan P.

7. — Soit, dans un plan P, un triangle rectangle isocèle ABC de sommet A. En A, on mène la droite D perpendiculaire au plan P et on joint un point M de cette droite aux points B et C. Démontrez que le triangle MBC est isocèle. Soit BB′, CC′, MM′ les hauteurs du triangle MBC. Démontrez que les droites AB′ et AC′ sont respectivement perpendiculaires aux droites MC et MB.

8. — Deux segments égaux MM′ et NN′ sont perpendiculaires en M et N à un plan P et de sens contraires. Montrez que M′N′ coupe MN en son milieu.

9. — On considère un angle $\widehat{xOy}$ et les plans P_1 et P_2 respectivement perpendiculaires aux côtés Ox et Oy. Démontrez que les plans P_1 et P_2 se coupent et que leur intersection est perpendiculaire au plan de l'angle $\widehat{xOy}$.

CHAPITRE V

PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES

(14e LEÇON)

28. Comparaison de la perpendiculaire et des obliques.

1°. Soit un plan P et un point A extérieur à ce plan; menons la perpendiculaire AO à ce plan (fig. 41).

Toute droite joignant A à un point quelconque autre que O du plan est une o b l i q u e .

Considérons une oblique quelconque AB.

Le plan déterminé par les droites AO et AB coupe le plan P suivant la droite OB et le triangle OBA est rectangle en O.

Le côté AO du triangle OBA est inférieur à l'hypoténuse AB (Géométrie, 2e année).

Par suite:

$$AO < AB .$$

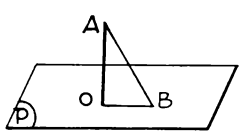

Fig. 41

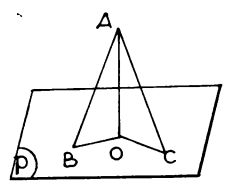

Fig. 42

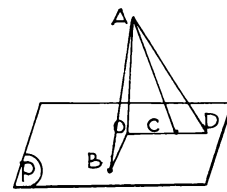

Fig. 43

2°. Soit deux obliques AB et AC et supposons que leurs pieds B et C soient équidistants du pied de la perpendiculaire AO (fig. 42).

Les triangles AOB et AOC sont égaux (2e cas d'égalité des triangles quelconques): $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 1D$; OB = OC et AO commun.

Par suite:

$$AB = AC .$$

3°. Soit deux obliques AB et AD (fig. 43) ; supposons que leurs pieds B et D soient inégalement distants du pied O de la perpendiculaire.

Supposons OB < OD et construisons le point C de OD tel que: OC = OB .

On a, d'après qui précède:

$$AC = AB .$$

Dans le plan AOD, l'oblique AD s'écarte plus que AC du pied O de la perpendiculaire.

On sait que $AD > AC$ (Géométrie, 2e année).

Par suite:

$$AD > AB .$$

Lorsque, d'un point A extérieur à un plan, on mène à ce plan la perpendiculaire AO et diverses obliques:

- **le segment AO est plus court que tout segment oblique,**
- **si deux segments obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire, ils sont égaux,**
- **si deux segments obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, ils sont inégaux; celui qui s'écarte le plus est le plus grand.**

$$OB = OC \Rightarrow AB = AC$$

$$OB < OD \Rightarrow AB < AD .$$

29. Réciproque du théorème précédent.

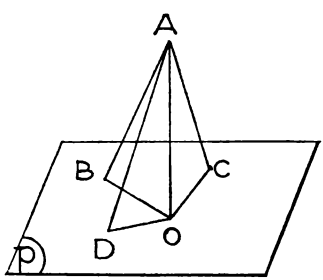

Fig. 44

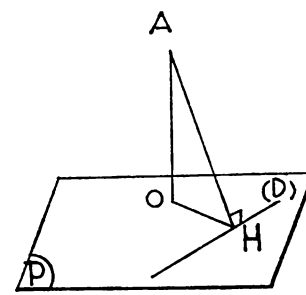

Fig. 45

La figure 44 représente un plan P, un point A non situé sur ce plan, la perpendiculaire AO à ce plan et trois obliques AB, AC, AD.

Supposons que l'on ait:

$$AB = AC .$$

Il est impossible que les points B et C soient inégalement distants de O, pied de la perpendiculaire car, s'il en était ainsi, les deux obliques seraient inégales.

D'où:

$$OB = OC.$$

Supposons $AB < AD$.

Il est impossible que: $OB = OD$ ou: $OB > OD$, car on aurait dans le premier cas: $AB = AD$, dans le deuxième cas: $AB > AD$.

D'où:

$$OB < OD.$$

Lorsque, d'un point A extérieur à un plan, on mène à ce plan la perpendiculaire AO et diverses obliques:

— si deux segments obliques sont égaux, ils s'écartent également du pied de la perpendiculaire,

— si deux segments obliques sont inégaux, ils s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire; le plus grand est celui qui s'en écarte le plus.

30. Théorème des trois perpendiculaires.

Menons par le point A la perpendiculaire AO au plan P et la perpendiculaire AH à une droite D située dans ce plan (fig. 45).

La droite D orthogonale à AO et perpendiculaire à AH est perpendiculaire au plan AOH (11e leçon).

La droite D est donc perpendiculaire à la droite OH.

Si, au lieu de commencer par la construction de AH, on commençait par mener OH perpendiculaire à D, AH serait perpendiculaire à D.

Si, d'un point non situé sur un plan P, on mène la perpendiculaire à ce plan et la perpendiculaire à une droite D de ce plan, la droite joignant les pieds de ces deux perpendiculaires est perpendiculaire à la droite D.

(15e LEÇON)

31. Plan médiateur d'un segment.

Soit I le milieu du segment AB et P le plan perpendiculaire à AB en I (fig. 46).

Le plan P est le plan médiateur du segment AB.

On appelle plan médiateur d'un segment le plan perpendiculaire au segment en son milieu.

Démontrons que tout point M du plan médiateur de AB est équidistant de A et de B.

En effet, MI étant médiatrice du segment AB, on a:

$$MA = MB.$$

Réciproquement: si M est un point équidistant de A et de B, la droite MI est médiatrice du segment AB et appartient au plan médiateur de AB.

De ce qui précède, il résulte:

L'ensemble des points équidistants de deux points A et B est le plan médiateur du segment AB.

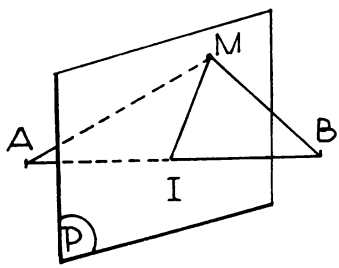

Fig. 46

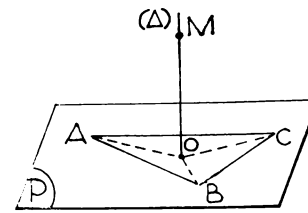

Fig. 47

32. Axe d'un triangle.

Soit un triangle ABC situé dans un plan P (fig. 47). Désignons par O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et par A la perpendiculaire en O au plan du triangle.

La droite Δ est l'axe du triangle ABC.

On appelle axe d'un triangle la perpendiculaire au plan de ce triangle menée par le centre du cercle circonscrit au triangle.

Démontrons que chaque point M de Δ est équidistant des sommets du triangle ABC.

Les segments OA, OB et OC étant égaux, les segments obliques MA, MB et MC sont aussi égaux (14e leçon).

Démontrons maintenant que: tout point M équidistant des trois sommets du triangle ABC se trouve sur l'axe de ce triangle.

En effet: si MA = MB = MC, le pied de la perpendiculaire menée par M au plan du triangle ABC s'écarte également des points A, B, C: le pied de la perpendiculaire menée par M au plan du triangle est donc confondu avec O, centre du cercle circonscrit à ABC et, par suite:

M se trouve sur l'axe du triangle ABC.

L'ensemble des points équidistants des trois sommets d'un triangle est l'axe de ce triangle.

33. Distance d'un point à un plan.

Soit H le pied de la perpendiculaire menée du point O au plan P (fig. 48). La longueur de ce segment OH est la distance du point O au plan P.

La distance d'un point à un plan est la longueur du segment perpendiculaire au plan compris entre ce point et le plan.

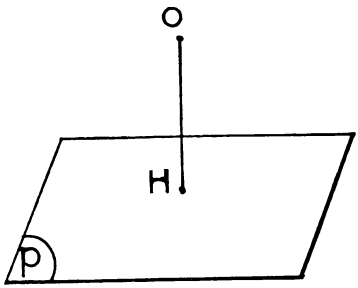

Fig. 48

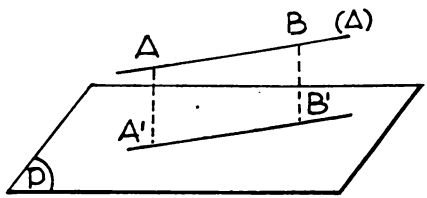

Fig. 49

34. Distance d'une droite à un plan parallèle.

Considérons un plan P et une droite Δ parallèle à ce plan (fig. 49).

Les points A′ et B′ étant les pieds des perpendiculaires menées respectivement des points A et B de Δ au plan P, le quadrilatère AA′B′B est un parallélogramme car: AB ∥ A′B′ et AA′ ∥ BB′.

Ainsi, les segments AA′ et BB′ sont égaux.

Cette longueur commune est la distance de la droite Δ au plan P.

On appelle distance d'une droite et d'un plan parallèles la distance d'un point quelconque de cette droite à ce plan.

35. Distance de deux plans parallèles.

Considérons deux plans parallèles P et P′ (fig. 50). Par les points A,B,C situés sur le plan P, menons au plan P′ les perpendiculaires AA′, BB′, CC′.

Ces segments sont parallèles et égaux.

La longueur commune de ces segments est la distance des plans parallèles P et P′.

On appelle distance de deux plans parallèles la distance d'un point quelconque de l'un des deux plans à l'autre.

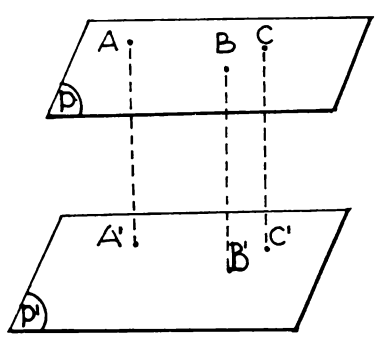

Fig. 50

RÉSUMÉ

Lorsque, d'un point A extérieur à un plan, on mène à ce plan la perpendiculaire AO et diverses obliques:
— le segment AO est plus court que tout segment oblique,
— si deux segments obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire, ils sont égaux,
— si deux segments obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, ils sont inégaux; celui qui s'écarte le plus est le plus grand.

Lorsque, d'un point A extérieur à un plan, on mène à ce plan la perpendiculaire AO et diverses obliques:
— si deux segments obliques sont égaux, il s'écartent également du pied de la perpendiculaire,
— si deux segments obliques sont inégaux, ils s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire; le plus grand est celui qui s'en écarte le plus.

Si, d'un point non situé sur un plan P, on mène la perpendiculaire à ce plan et la perpendiculaire à une droite D de ce plan, la droite joignant les pieds de ces deux perpendiculaires est perpendiculaire à la droite D.

On appelle plan médiateur d'un segment le plan perpendiculaire au segment en son milieu.

L'ensemble des points équidistants de deux points A et B est le plan médiateur du segment AB.

On appelle axe d'un triangle la perpendiculaire au plan de ce triangle menée par le centre du cercle circonscrit au triangle.

L'ensemble des points équidistants des trois sommets d'un triangle est l'axe de ce triangle.

La distance d'un point à un plan est la longueur du segment perpendiculaire au plan compris entre ce point et le plan.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — On considère deux plans parallèles P et Q. Quel est l'ensemble des points dont le rapport des distances à ces deux plans soit égal à un nombre donné m (Exemple: $m = \frac{2}{3}$, $m = \frac{4}{5}$) ?

2. — On considère un plan P, un point I de ce plan et une droite quelconque Δ. Construisez une droite passant par I, située dans le plan P et orthogonale à Δ.

3. — On considère deux points M et N. 1° Démontrez que les plans équidistants de ces deux points sont les plans passant par le milieu du segment MN et les plans parallèles à la droite MN. 2° Par un point donné I, menez un plan équidistant de M et N. 3° Soit une droite D ne contenant pas les points M et N. Menez, par cette droite, un plan équidistant des points M et N.

4. — Soit deux plans P_1 et P_2 sécants suivant une droite D. Une droite Δ du plan P_1 coupe D en I. Construisez dans le plan P_2 une droite perpendiculaire en I à la droite Δ.

5. — Soit deux segments de droite égaux MN et M'N'. Comment faut-il choisir les points I de l'espace pour que les triangles IMN et IM'N' soient égaux?

6. — On considère une droite D et un point extérieur à cette droite. Soit I' le pied de la perpendiculaire menée du point I à la droite D. Un plan variable P pivote autour de la droite D et on mène IH perpendiculaire à P. Quelle est la courbe décrite par le point H ?

7. — Deux droites D et D' se coupent en un point O. On considère un plan P perpendiculaire à D et un plan P' perpendiculaire à D'. Démontrez que les deux plans P et P' sont sécants suivant une droite Δ. Démontrez ensuite que cette droite est perpendiculaire au plan déterminé par les deux droites D et D'.

8. — On considère deux droites D et D' et un point I. Menez par I une droite Δ perpendiculaire à D et à D'.

9. — On considère un plan P et un point I extérieur à ce plan. La distance II' du point I au plan mesurant 40 cm, on mène une oblique IL de 45 cm. Quelle est la longueur du segment IL et quelle est la figure décrite par le point L lorsque l'oblique IL prend toutes les positions possibles ?

10. — Soit un plan P, une droite D extérieure à ce plan et un point I. Menez par I une droite Δ parallèle à P orthogonale à D.

11. — On considère un tétraèdre ABCD et la sphère passant par les sommets A, B, C et D. Démontrez que le centre O de cette sphère est situé sur l'axe du triangle BCD et dans le plan médiateur de AB. Trouvez trois autres axes et cinq autres plans médiateurs auxquels appartient le point O.

12. Deux plans P et P' se coupent suivant une droite Δ. Une droite D située dans le plan P coupe Δ en un point I. Construisez dans le plan P' une droite D' passant par I et perpendiculaire à D.

CHAPITRE VI

ANGLES DIÈDRES.

(16e LEÇON)

36. Notion de dièdre.

Soit deux demi-plans P et Q issus d'une même droite AB (fig. 51).

Chaque portion de l'espace limitée par ces deux demi-plans est un angle dièdre ou dièdre.

On appelle angle-dièdre ou dièdre une portion de l'espace limitée par deux demi-plans issus d'une même droite.

La droite AB est l'arête du dièdre, les demi-plans P et Q en sont les faces.

Le dièdre est désigné par le symbole (P, AB, Q) ou, s'il n'y a pas d'équivoque à craindre, par (P, Q) ou (A, B).

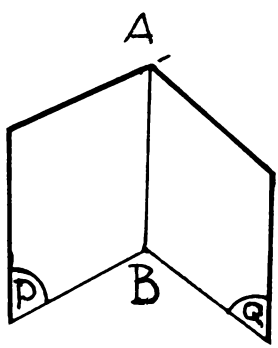

Fig. 51

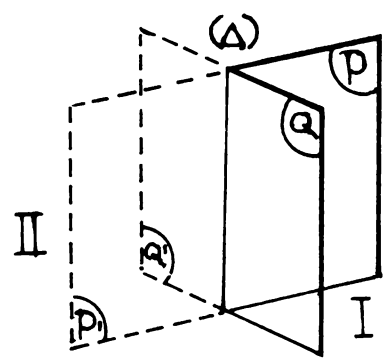

Fig. 52

Considérons deux demi-plans P et Q ni opposés, ni superposés et issus de la même droite Δ (fig. 52).

Ils limitent deux portions de l'espace que nous désignons par les chiffres I et II.

Les demi-plans P′ et Q′, opposés respectivement aux demi-plans P et Q, sont dans l'un des deux dièdres.

Le dièdre (P, Q) limitant la région I est un dièdre s a i l l a n t.

Le dièdre (P, Q) limitant la région II est un dièdre r e n t r a n t.

Remarquons que la région de l'espace limitée par un dièdre saillant est située tout entière d'un même côté du plan de l'une et de l'autre face.

Sauf indication contraire, les dièdres considérés dans ce manuel seront toujours des dièdres saillants.

37. Dièdre plat. Dièdre nul.

Un dièdre est p l a t si ses faces sont dans un même plan (fig. 53).

Un dièdre est n u l si ses faces sont confondues.

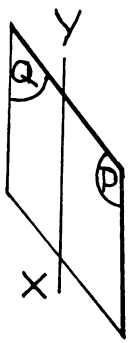

Fig. 53

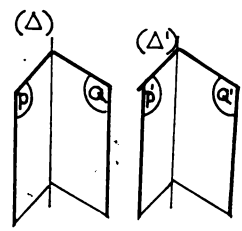

Fig. 54

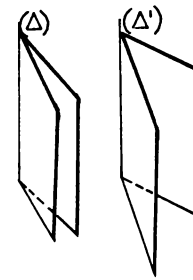

Fig. 55

38. Égalité et inégalité de dièdres.

Deux dièdres sont é g a u x lorsqu'ils sont superposables.

Les dièdres (Δ) et (Δ′) de la figure 54 sont égaux s'il est possible de superposer simultanément P et P′ d'une part, Q et Q′ d'autre part, ou bien P et Q′ d'une part, Q et P′ d'autre part.

Lorsque deux dièdres ne peuvent pas être superposés, ils sont i n é g a u x.

Soit deux dièdres (Δ) et (Δ′) (fig. 55).

Lorsqu'il est possible de placer le dièdre (Δ) de manière que, les arêtes de (Δ) et (Δ′) coïncidant, une face de (Δ) se superpose à une face de (Δ′), et que l'autre face de (Δ) soit à l'intérieur du dièdre (Δ′), on dira que le dièdre (Δ) est plus petit que le dièdre (Δ′).

On note:

$$\text{dièdre } (\Delta) < \text{dièdre } (\Delta').$$

(17e LEÇON)

39. Rectiligne d'un dièdre.

Considérons deux points distincts O et O′ situés sur l'arête du dièdre (P, Δ, Q) de la figure 56.

Coupons ce dièdre par deux plans perpendiculaires à Δ en O et O′.

Ces plans coupent le demi-plan P suivant les demi-droites Ox et O′x′, le demi-plan Q suivant les demi-droites Oy et O′y′.

Les demi-droites Ox et O′x′, toutes deux perpendiculaires à Δ, sont parallèles et de même sens et il en est de même des demi-droites Oy et O′y′.

Il en résulte que les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'O'y'}$ sont égaux.

Chacun de ces angles est un angle rectiligne ou rectiligne du dièdre.

Le rectiligne d'un dièdre est l'angle obtenu en coupant ce dièdre par un plan perpendiculaire à l'arête.

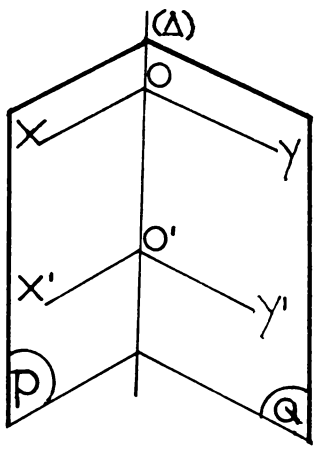

Fig. 56

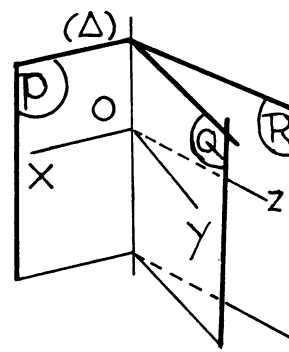

Fig. 57

40. Rectilignes de deux dièdres égaux.

Nous avons vu plus haut que, par définition, deux dièdres égaux sont superposables.

On en déduit immédiatement que leurs rectilignes sont égaux.

Lorsque deux dièdres sont égaux, ils ont même rectiligne.

Considérons maintenant deux dièdres ayant des rectilignes égaux.

Si l'on superpose ces deux rectilignes, les arêtes des dièdres se super-

posent en même temps car chacune d'elles est perpendiculaire au plan du rectiligne en son sommet.

Ainsi, les faces des deux dièdres se superposent chacune à chacune.

Lorsque deux dièdres ont même rectiligne, ils sont égaux.

41. Dièdres adjacents.

Les deux dièdres (P, Δ, Q) et (Q, Δ, R) représentés par la figure 57 ont l'arête Δ commune, la face Q commune et sont situés de part et d'autre de la face Q.

Ces deux dièdres sont a d j a c e n t s.

Deux dièdres sont dits adjacents lorsqu'ils ont l'arête commune, une face commune, et s'ils sont situés de part et d'autre de cette face commune.

On voit aisément que les rectilignes de deux dièdres adjacents sont des angles adjacents.

Ainsi, les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$, rectilignes des dièdres (P, Δ, Q) et (Q, Δ, R) sont des angles adjacents (fig. 57).

42. Somme et différence de deux dièdres.

La s o m m e de deux dièdres saillants est le dièdre que l'on obtient en les plaçant dans la position de deux dièdres adjacents.

Ainsi, la somme des dièdres (P, Δ, Q) et (Q, Δ, R) de la figure 57 est le dièdre (P, Δ, R).

La d i f f é r e n c e de deux dièdres est le dièdre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand.

La différence de deux dièdres égaux est nulle.

(18e LEÇON)

43. Bissecteur d'un dièdre.

Soit un dièdre (P, Δ, Q) et son rectiligne $\widehat{xOy}$ (fig. 58).

Construisons la bissectrice Oz de cet angle et soit R le demi-plan déterminé par Oz et l'arête Δ.

Comme les angles $\widehat{xOz}$ et $\widehat{zOy}$ sont égaux, les deux dièdres (P, Δ, R) et (R, Δ, Q) le sont aussi.

Le demi-plan R est le b i s s e c t e u r du dièdre (P, Δ, Q).

On appelle bissecteur d'un dièdre le demi-plan qui, issu de l'arête de ce dièdre, le partage en deux dièdres égaux.

44. Rapport de deux dièdres.

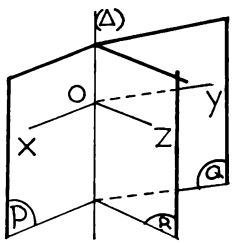

Fig. 58

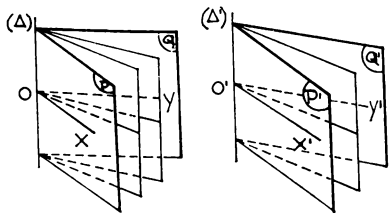

Fig. 59

Soit deux dièdres (P, Δ, Q) et (P', Δ', Q') dont les rectilignes sont respectivement $\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'O'y'}$ (fig. 59).

Pour fixer les idées, supposons que: $\dfrac{\widehat{xOy}}{\widehat{x'O'y'}} = \dfrac{3}{2}$.

Partageons $\widehat{xOy}$ en trois parties égales, $\widehat{x'O'y'}$ en deux parties égales.

Les cinq angles obtenus sont égaux et chacun d'eux peut être considéré comme rectiligne d'un dièdre.

Les cinq dièdres ainsi formés sont égaux: le dièdre (P, Δ, Q) contient trois de ces dièdres, le dièdre (P', Δ', Q') en contient deux.

Il en résulte que le rapport du dièdre (P, Δ, Q) au dièdre (P', Δ', Q') est égal à $\dfrac{3}{2}$, c'est-à-dire égal à celui des rectilignes correspondants.

Le rapport de deux dièdres est égal au rapport de leurs rectilignes.

45. Mesure d'un dièdre.

On convient de choisir comme unité de dièdre celui qui a pour rectiligne l'unité d'angle.

On voit facilement que, dans ces conditions, la mesure d'un dièdre est égale à celle de son rectiligne.

Si, par exemple, le dièdre (P', Δ', Q') est l'unité de dièdre (fig. 59) l'angle $\widehat{x'O'y'}$ est l'unité d'angle, la mesure du dièdre (P, Δ, Q) et de son rectiligne est égale à $\dfrac{3}{2}$.

46. Unités de dièdre.

L'unité principale de la mesure des angles étant l'angle droit, l'unité principale de la mesure des dièdres est le dièdre dont le rectiligne est un angle droit: on l'appelle dièdre droit.

Un dièdre droit est un dièdre dont le rectiligne est un angle droit.

Les sous-multiples de cette unité sont les mêmes que ceux qui ont été définis en géométrie plane: degrés, minutes, secondes, grades, décigrades, centigrades, etc.

Ainsi, un dièdre de 38° 43′ 6″ a pour rectiligne un angle de 38° 43′ 6″.

Un dièdre plat a pour rectiligne un angle plat.

On en conclut:

Un dièdre droit est égal à la moitié d'un dièdre plat.

47. Dièdre aigu, dièdre obtus. Dièdres complémentaires et supplémentaires.

— Un dièdre est aigu ou obtus lorsque son rectiligne est aigu ou obtus.

— Deux dièdres sont complémentaires lorsque leur somme est un dièdre droit.

— Deux dièdres sont supplémentaires lorsque leur somme est un dièdre plat.

48. Dièdres opposés par l'arête.

On voit facilement que deux dièdres opposés par l'arête sont égaux.

49. Angle de deux plans.

Soit deux plans P et Q sécants suivant la droite Δ (fig. 60).

L'angle $\widehat{xOy}$, rectiligne d'un des quatre dièdres formés par P et Q, est l'angle des deux plans.

De préférence, on appelle ainsi le rectiligne de l'un des deux dièdres aigus formés par les deux plans donnés.

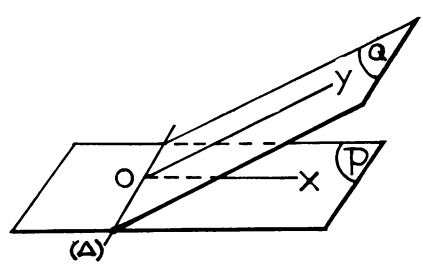

Fig. 60

On appelle angle de deux plans sécants le rectiligne de l'un des dièdres aigus déterminés par ces plans.

RÉSUMÉ

On appelle angle dièdre ou dièdre une portion de l'espace limitée par deux demi-plans issus d'une même droite.

Le rectiligne d'un dièdre est l'angle obtenu en coupant ce dièdre par un plan perpendiculaire à l'arête.

Lorsque deux dièdres sont égaux, ils ont même rectiligne.

Lorsque deux dièdres ont même rectiligne, ils sont égaux.

Deux dièdres sont dits adjacents lorsqu'ils ont l'arête commune, une face commune, et s'ils sont situés de part et d'autre de cette face commune.

On appelle bissecteur d'un dièdre le demi-plan qui, issu de l'arête de ce dièdre, le partage en deux dièdres égaux.

Un dièdre droit est un dièdre dont le rectiligne est un dièdre droit.

On appelle angle de deux plans sécants le rectiligne de l'un des dièdres aigus déterminés par ces plans.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — Démontrez que les bissecteurs de deux dièdres opposés par l'arête appartiennent à un même plan.

2. — On considère deux dièdres adjacents supplémentaires. Démontrez que les faces extérieures de ces dièdres appartiennent à un même plan.

3. — Soit P le plan passant par le milieu I du segment AB et perpendiculaire à la droite AB. Démontrez que tout point M du plan P est équidistant de A et de B. Étudiez la réciproque.

4. — Soit R le bissecteur du dièdre (P, Δ, Q) et I un point de R. Par I, on mène la perpendiculaire à R qui coupe P en C et Q en D. Démontrez que MC = MD.

5. — On considère deux plans parallèles P et P′ coupés par un plan R respectivement suivant les droites D et D′. Quel est le nombre de dièdres ainsi formés ? Démontrez que ces dièdres sont deux à deux égaux ou supplémentaires.

6. — On considère deux dièdres ayant leurs faces respectivement parallèles et de même sens; démontrez que ces dièdres sont égaux. Démontrez que deux dièdres dont les faces sont respectivement parallèles et de sens contraires, sont égaux.

7. — Soit un dièdre (P, Δ, Q) et un point M. On mène par M la perpendiculaire x′Mx au plan P et la perpendiculaire y′My au plan Q. Comparez l'angle des droites x′x et y′y au rectiligne du dièdre.

8. — Soit un point I variable sur un cercle de diamètre AB. En A et B, on mène les perpendiculaires Ax et By au plan du cercle. Quelle est la nature du dièdre dont les faces sont les demi-plans IAx et IBy ?

9. — Démontrez que le dièdre formé par les bissecteurs de deux dièdres adjacents supplémentaires est un dièdre droit. Soit deux dièdres adjacents (P, Δ, Q) et (Q, Δ, R) ayant respectivement pour mesures α et β. Calculez le rectiligne du dièdre formé par leurs bissecteurs.

10. — Soit un triangle équilatéral ABC de côté a. En A, on mène la demi-droite Ax perpendiculaire au plan P du triangle et on porte sur Ax le segment AM = m. I étant le milieu de BC, démontrez que l'angle MIA est le rectiligne du dièdre d'arête BC dans le tétraèdre MABC. Déterminez m en fonction de a pour que ce dièdre mesure 60°.

11. — Soit un tétraèdre ABCD dont les faces sont des triangles équilatéraux de côté a. Démontrez que le plan bissecteur du dièdre d'arête AB est plan médiateur du segment CD. Évaluez le dièdre dont les faces sont les plans bissecteurs des dièdres d'arêtes AB et AC puis celui dont les faces sont les bissecteurs des dièdres d'arêtes AB et CD.

12. — On considère un plan P et deux points A et B non situés dans ce plan. Soit A′ et B′ les pieds des perpendiculaires menées respectivement de A et B à ce plan et Δ une droite contenue dans le plan P et perpendiculaire à A′B′ en un point I. Démontrez que l'angle $\widehat{AIB}$ est le rectiligne du dièdre d'arête Δ dont l'une des faces passe par A et l'autre par B. Déterminez le point I de A′B′ pour que le dièdre d'arête Δ soit droit.

CHAPITRE VII

PLANS PERPENDICULAIRES.

(19e LEÇON)

50. Notion de plans perpendiculaires.

Soit deux plans P et Q se coupant suivant la droite Δ (fig. 61).

Supposons qu'un plan perpendiculaire à Δ les coupe respectivement suivant les droites x'Ox et y'Oy.

Les plans P et Q forment quatre dièdres; si l'un d'eux, le dièdre de rectiligne $\widehat{xOy}$ par exemple, est un dièdre droit, on dit que les plans P et Q sont perpendiculaires.

Deux plans sécants sont dits perpendiculaires lorsque l'un des quatre dièdres qu'ils forment est droit.

L'angle $\widehat{xOy}$ étant supposé droit, les angles $\widehat{x'Oy}$, $\widehat{x'Oy'}$, $\widehat{xOy'}$ le sont également et les quatre dièdres formés par les plans P et Q sont droits.

Lorsque deux plans sont perpendiculaires, les quatre dièdres qu'ils forment sont droits.

51. Conditions de perpendicularité de deux plans.

La figure 62 représente deux plans perpendiculaires P et Q.

Nous nous proposons de démontrer que chacun de ces deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre.

Menons par un point O de l'intersection des deux plans le plan perpendiculaire à Δ et coupant P et Q respectivement suivant les droites x'Ox et y'Oy. La droite y'Oy est ainsi perpendiculaire à Δ.

Les plans P et Q étant perpendiculaires, leur rectiligne $\widehat{xOy}$ est droit et la droite Oy est perpendiculaire à Ox.

Ainsi, Oy perpendiculaire aux deux droites concourantes Δ et Ox du plan P, est perpendiculaire à ce plan.

De même, la droite Ox du plan P est perpendiculaire au plan Q.

Lorsque deux plans sont perpendiculaires, chacun d'eux contient une perpendiculaire à l'autre.

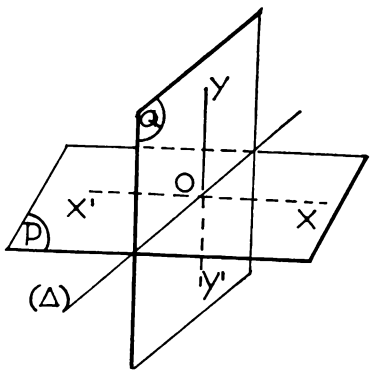

Fig. 61

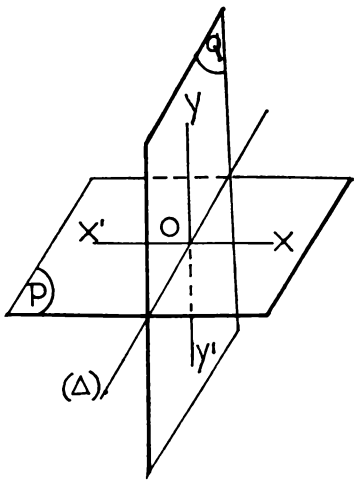

Fig. 62

Démontrons maintenant que: si le plan Q contient une droite y'Oy perpendiculaire en O au plan P, les plans P et Q sont perpendiculaires.

Les plans P et Q, distincts, ont le point O en commun et, de ce fait, se coupent suivant une droite Δ passant par ce point (fig. 62).

Menons dans P et par O la droite x'Ox perpendiculaire à Δ.

La droite y'Oy, perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire à Δ et à Ox.

Il en résulte que l'angle $\widehat{xOy}$, rectiligne d'un des quatre dièdres formés par les deux plans P et Q, est un angle droit; les plans P et Q sont donc perpendiculaires.

Si une droite est perpendiculaire à un plan P, tout plan passant par cette droite est perpendiculaire à ce plan P.

(20e LEÇON)

52. Conséquences.

Soit P et Q deux plans perpendiculaires se coupant suivant la droite Δ (fig. 63).

M étant un point du plan Q, menons dans ce plan la droite MO perpendiculaire à Δ et, dans le plan P, la droite ON également perpendiculaire à Δ.

L'angle MON, rectiligne d'un des dièdres formés par les plans perpendiculaires P et Q, est un angle droit et il en résulte que MO, perpendiculaire aux droites ON et Δ du plan P, est perpendiculaire à ce plan.

La droite OM est confondue avec la perpendiculaire menée de M au plan P car, d'un point donné, on peut mener à un plan une perpendiculaire et une seule (13e leçon).

Lorsque deux plans P et Q sont perpendiculaires, toute droite menée d'un point du plan P perpendiculairement au plan Q est contenue dans le plan P.

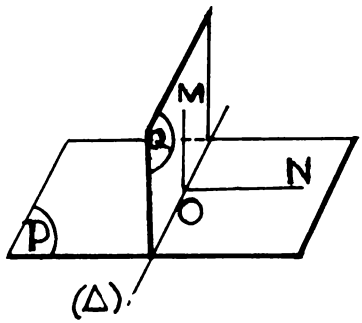

Fig. 63

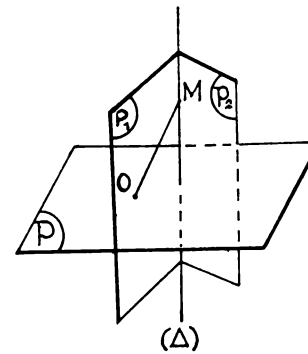

Fig. 64

Soit deux plans sécants P_1 et P_2, l'un et l'autre perpendiculaires au plan P (fig. 64).

Par un point M de l'intersection Δ de ces deux plans, menons la droite MO perpendiculaire au plan P.

D'après le théorème qui précède, la droite MO est contenue dans chacun des plans P_1 et P_2: la droite MO est donc confondue avec la droite Δ.

Si deux plans sécants P_1 et P_2 sont perpendiculaires à un plan P, leur intersection est perpendiculaire à ce plan P.

53. Plans passant par une droite donnée et perpendiculaires à un plan donné.

Nous avons vu que, lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan P, tout plan passant par cette droite est perpendiculaire à ce plan.

Considérons alors une droite D non perpendiculaire au plan P (fig. 65).

Par un point M de la droite D, menons la perpendiculaire MO au plan P.

Les droites MO et D, distinctes, déterminent un plan Q.

Ce plan est perpendiculaire au plan P car il contient MO, droite perpendiculaire au plan P.

Le plan Q est unique:

s'il existait un autre plan R, également perpendiculaire à P et passant par la droite D, l'intersection D de ces plans Q et R devrait être perpendicu-

laire au plan P, ce qui est incompatible avec l'hypothèse suivant laquelle la droite D n'est pas perpendiculaire à ce plan.

Par une droite non perpendiculaire à un plan, on peut mener à ce plan un plan perpendiculaire et un seul.

Soit P_1 et P_2 deux plans parallèles (fig. 66).
Le plan Q perpendiculaire au plan P_1, contient une droite D perpendiculaire à ce plan.

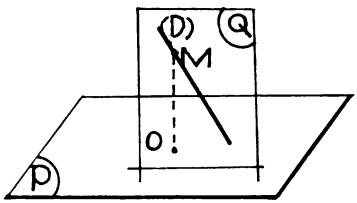

Fig. 65

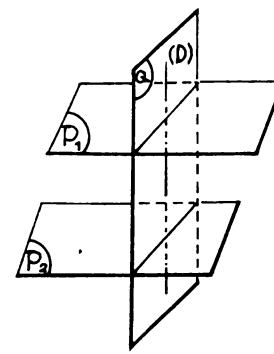

Fig. 66

Cette droite D étant également perpendiculaire au plan P_2 (12e leçon), le plan Q contient une droite perpendiculaire au plan P_2.
Par suite: le plan Q est perpendiculaire au plan P_2.

Lorsque deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, tout plan Q perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

RÉSUMÉ

Deux plans sécants sont dits perpendiculaires lorsque l'un des quatre dièdres qu'ils forment est droit.

Lorsque deux plans sont perpendiculaires, les quatre dièdres qu'ils forment sont droits.

Lorsque deux plans sont perpendiculaires, chacun d'eux contient une perpendiculaire à l'autre.

Si une droite est perpendiculaire à un plan P, tout plan passant par cette droite est perpendiculaire à ce plan P.

Lorsque deux plans P et Q sont perpendiculaires, toute droite menée d'un point du plan P perpendiculairement au plan Q est contenue dans le plan P.

Si deux plans sécants P_1 et P_2 sont perpendiculaires à un plan P, leur intersection est perpendiculaire à ce plan P.

Par une droite non perpendiculaire à un plan, on peut mener, à ce plan, un plan perpendiculaire et un seul.

Lorsque deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, tout plan Q perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — On considère un plan P perpendiculaire à une droite donnée D. Dans le plan P, on trace une droite D'. Ainsi est mis en évidence le fait que, par D', on peut faire passer un plan perpendiculaire à D.

Inversement, on considère deux droites quelconques de l'espace D et D'. Peut-on faire passer par D' un plan perpendiculaire à D ? Montrez que le problème est, en général, impossible. Dans quelles conditions ce problème admet-il une solution ?

2. — On considère deux plans perpendiculaires P et Q et leur rectiligne xOy. Démontrez que tout plan passant par Ox ou par Oy coupe le dièdre (P, Q) suivant un angle droit.

3. — On considère un tétraèdre ABCD. La face ABC est rectangle en B et l'arête AD est perpendiculaire au plan ABC. Démontrez que BC est perpendiculaire au plan DAB et que toutes les faces du tétraèdre sont des triangles rectangles. Démontrez que les plans ABD et DBC sont perpendiculaires.

4. — Par les extrémités A et B du diamètre d'un cercle, on mène les perpendiculaires x'Ax et y'By au plan du cercle. Soit I un point du cercle distinct de A et de B. Démontrez que les plans Ix'x et Iy'y sont perpendiculaires.

5. — On considère un carré ABCD de côté a situé dans un plan P. En A, on mène le segment AI perpendiculaire au plan P et de longueur a. O étant le milieu du segment IB, démontrez que le plan AOD est perpendiculaire à IB et aux plans IAB et IBC.

6. — On considère un carré ABCD. On mène les segments AA', BB' CC' et DD' perpendiculaires au plan du carré, d'un même côté de ce plan et tels que: AA' = CC' = 2 m; BB' = m et DD' = 3 m. Démontrez que A'C' est parallèle au plan du carré et que B'D' coupe le segment A'C' en son milieu.

7. — On considère deux plans perpendiculaires P et Q. Soit D la droite d'intersection de ces deux plans et L un point de cette droite. Un plan R passant par L coupe respectivement les plans P et Q suivant les droites Ix et Iy. Démontrez qu'il existe une infinité de plans R tels que l'angle xIy soit droit.

8. — On considère deux plans perpendiculaires P et Q sécants suivant la droite xy. A désignant un point du plan P et B un point du plan Q, tels que les droites AB et xy ne soient pas orthogonales, on mène la perpendiculaire AC sur xy. Démontrez que le triangle ACB est rectangle et trouvez sur xy un deuxième point C' tel que l'angle AC'B soit droit. Étudiez le cas où les droites AB et xy sont orthogonales.

9. — Soit deux plans perpendiculaires P et Q sécants suivant une droite Δ. A et B étant deux points de Δ, on trace dans P la droite x'Ax perpendiculaire à Δ et, dans Q, la droite y'By perpendiculaire à Δ. M étant un point de x'x et N un point de y'y, démontrez que les triangles AMN et BMN sont rectangles. Établissez les relations: $AM^2 + BN^2 = MN^2 - AB^2$; $AN^2 - BM^2 = MN^2 + AB^2$.

10. — Soit un carré ABCD de côté a situé dans un plan P. O étant le centre du carré, on mène par ce point la perpendiculaire au plan P et on porte sur cette perpendiculaire le segment $OI = \frac{a}{2}$. On mène la hauteur IH dans le triangle IBC et la hauteur IK dans le triangle ISK. Évaluez IH et IK et démontrez que le triangle ISK est rectangle. Démontrez que les plans des triangles IBC et IAD se coupent suivant la parallèle à BC menée par I et que ces plans sont perpendiculaires.

CHAPITRE VIII

PROJECTIONS ORTHOGONALES SUR UN PLAN.

(21e LEÇON)

54. Projection orthogonale d'un point sur un plan.

Soit un plan P et un point quelconque M de l'espace (fig. 67).

Menons par M la perpendiculaire au plan P.

Le point M′, pied de cette perpendiculaire est la projection orthogonale du point M sur le plan P.

M étant un point quelconque de l'espace, on appelle projection orthogonale de ce point sur le plan P le pied de la perpendiculaire menée de ce point sur ce plan.

Le plan P est le plan de projection.

La droite MM′ est la projetante du point M sur le plan P.

A tout point de l'espace correspond un point du plan de projection qui est la projection du point.

Lorsque le point N est dans le plan de projection, il est confondu avec sa projection N′ sur P (fig. 67).

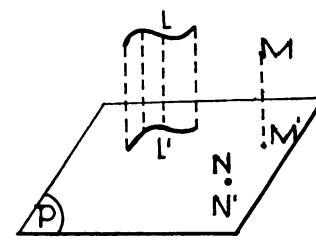

Fig. 67

55. Projection d'une figure.

Lorsqu'un point L décrit une figure F, sa projection L′ sur le plan P décrit une figure F′: c'est la projection de la figure sur le plan P (fig. 67).

On appelle projection d'une figure sur un plan l'ensemble des projections des points de la figure sur le plan.

56. Projection d'une droite.

Supposons d'abord que la droite donnée soit perpendiculaire au plan de projection P (fig. 68).

Dans ce cas, les projetantes de tous les points de D sont confondues avec D et il en résulte que tous les points de cette droite se projettent au point I, pied de la droite D sur le plan P.

Supposons maintenant que la droite D ne soit pas perpendiculaire au plan P de projection (fig. 69).

La projetante MM′ d'un point M de la droite D détermine avec celle-ci le plan P′ passant par D et perpendiculaire au plan P.

Ce plan P′ coupe le plan P suivant la droite D′ et contient la projetante d'un point quelconque N de D (20° leçon).

Ainsi: N′, projection de N, est sur D′ et on en conclut que la droite D′ est la projection de la droite D.

Le plan P′ est appelé plan projetant la droite.

La projection orthogonale d'une droite sur un plan non perpendiculaire à cette droite, est une droite.

Lorsque la droite donnée D coupe le plan P en un point I, ce point est évidemment situé sur la projection D′ de la droite D (fig. 69).

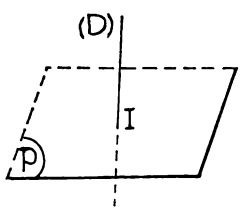

Fig. 68

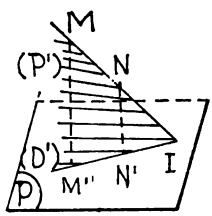

Fig. 69

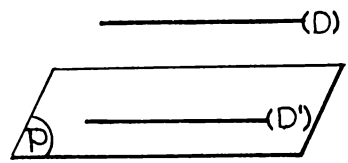

Fig. 70

57. Projection d'une droite parallèle au plan de projection.

Si la droite D est parallèle au plan de projection (fig. 70), le plan projetant la droite coupe le plan de projection suivant une parallèle à la droite donnée (5° leçon).

Une droite parallèle au plan de projection est parallèle à sa projection.

(22° LEÇON)

58. Projections de deux droites parallèlles.

Soit deux droites parallèles non perpendiculaires au plan de projection.

Si le plan qu'elles déterminent est perpendiculaire au plan de projection, les projections de ces deux droites sont des droites confondues.

Supposons maintenant que le plan déterminé par les droites parallèles D_1 et D_2 ne soit pas perpendiculaire au plan de projection P (fig. 71).

Les projetantes AA′ d'un point A de la droite D_1 et BB′ d'un point B de la droite D_2, toutes deux perpendiculaires au plan P, sont parallèles (13e leçon).

Ainsi, le plan projetant D_1 contient deux droites concourantes AA′ et D_1 respectivement parallèles aux droites BB′ et D_2 du plan projetant la droite D_2.

Ces deux plans sont donc parallèles.

On en conclut que leurs intersections D'_1 et D'_2 avec le plan P sont aussi parallèles.

Les projections de deux droites parallèles dont le plan n'est pas perpendiculaire au plan de projection, sont des droites parallèles.

59. Projection d'un segment de droite.

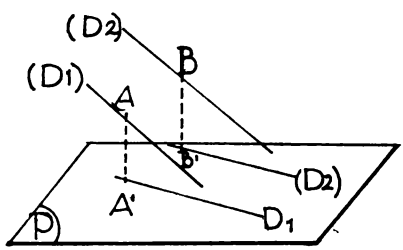

Fig. 71

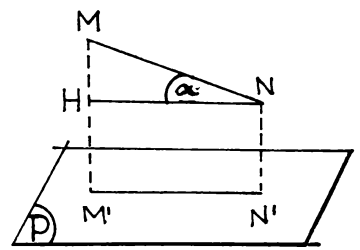

Fig. 72

Soit un segment MN se projetant sur un plan P en M′N′ (fig. 72).

Menons NH perpendiculaire à MM′ et désignons par α l'angle $\widehat{MNH}$.

Nous savons que: HN = MN cos α (Géométrie plane, 3e année).

Le quadrilatère NHM′N′ étant un rectangle, les segments M′N et HN sont égaux.

D'où:

$$M'N' = MN \cos \alpha$$

60. Projections de deux segments égaux de même support ou de supports parallèles.

La figure 73 représente deux segments égaux AB et CD de même support et leurs projections A′B′ et C′D′ sur le plan P.

Les plans projetant AB et CD sont confondus.

En appliquant le théorème de Thalès, on trouve immédiatement: $A'B' = C'D'$ (Géométrie plane, 3e année).

Dans le cas de la figure 74, nous avons supposé que les supports parallèles de AB et CD sont distincts et se trouvent dans le même plan projetant.

Les projetantes CC′ et DD′ déterminent sur le support de AB le segment C_1D_1 égal à CD.

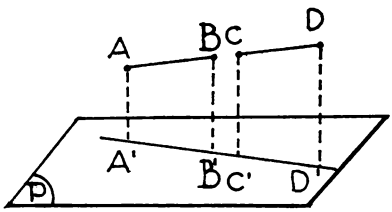

Fig. 73

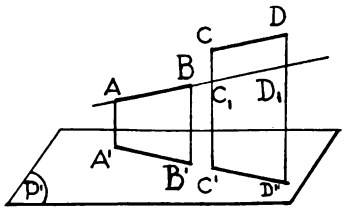

Fig. 74

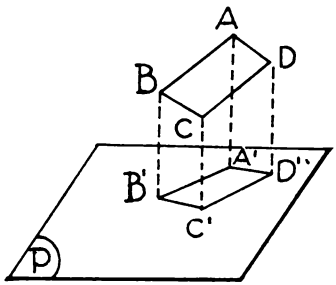

Fig. 75

Nous avons vu plus haut que les segments égaux AB et C_1D_1 se projettent sur le plan P suivant deux segments égaux A′B′ et C′D′.

On en conclut que les segments égaux AB et CD se projettent suivant deux segments égaux A′B′ et C′D′.

Si les segments égaux AB et CD de supports parallèles ne sont pas dans le même plan projetant (fig. 75), leurs projections A′B′ et C′D′ sont des segments parallèles car les plans projetant AB et CD sont parallèles.

Pour la même raison, B′C′ et D′A′, projections respectives de BC et DA, sont parallèles.

Le quadrilatère A′B′C′D′ est donc un parallélogramme et, par suite, les segments A′B′ et C′D′ sont égaux.

D'où:

Les projections de deux segments égaux, non perpendiculaires au plan de projection, de même support on de supports parallèles, sont des segments égaux.

RÉSUMÉ

M étant un point quelconque de l'espace, on appelle projection orthogonale de ce point sur le plan P le pied de la perpendiculaire menée de ce point sur ce plan.

On appelle projection d'une figure sur un plan l'ensemble des projections des points de la figure sur le plan.

La projection orthogonale d'une droite sur un plan non perpendiculaire à cette droite est une droite.

Une droite parallèle au plan de projection est parallèle à sa projection.

Les projections de deux droites parallèles dont le plan n'est pas perpendiculaire au plan de projection, sont des droites parallèles.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. — Étudiez les projections d'une droite sur deux plans parallèles.

2. — Soit un point I se projetant en I′ sur le plan P et en I″ sur une droite Δ non parallèle à P. Construisez le point I.

3. — On considère un point I se projetant sur les plans P et Q respectivement en I′ et I″. Démontrez que le plan II′I″ est perpendiculaire à la fois aux plans P et Q. Démontrez ensuite que l'on peut construire le point I si on se donne les points I′ et I″ dans un plan perpendiculaire à l'intersection des plans P et Q.

4. — Démontrez que la projection d'un parallélogramme sur un plan P non perpendiculaire au plan du parallélogramme est un parallélogramme. Démontrez la réciproque: si un quadrilatère plan ABCD se projette suivant un parallélogramme, ABCD est un parallélogramme.

5. — Le parallèlogramme KLMN se projette en K′L′M′N′ sur le plan P. Quelle est la nature du quadrilatère K′L′M′N′ ? Quelle est la projection sur le plan P du centre O du parallélogramme KLMN ?

6. — On considère deux plans P et Q non parallèles et une droite D non située dans ces plans. A quelle condition doit satisfaire la droite D pour que ses projections sur P et Q soient parallèles ?

7. — On considère deux plans P et Q non parallèles. Une ligne C de l'espace se projette sur chacun de ces plans suivant une droite. Peut-on dire que cette ligne est une droite ?

8. — Un angle droit $\widehat{xOy}$ a son côté Ox dans un plan P et sa projection sur ce plan est l'angle $\widehat{xOy'}$. Démontrez que l'angle $\widehat{xOy'}$ est droit.

9. — Que peut-on dire d'un angle dont la projection sur le plan P est un angle droit et qui a un côté parallèle au plan P ?

10. — On considère deux plans P et P_1 non parallèles. Les projections d'une droite Δ sur ces plans sont les droites D et D_1 respectivement; celle d'une autre droite Δ' sont les droites D' et D_1'. On suppose que les droites D et D' sont parallèles, ainsi que les droites D_1 et D_1'. Que peut-on dire des droites Δ et Δ' ?

11. — Soit deux plans P et Q sécants suivant une droite Δ et un point I extérieur à ces deux plans. Construisez une droite D passant par I, rencontrant Δ et telle que ses projections sur P et Q soient deux droites orthogonales.

12. — On considère un rectangle ABCD ayant son côté AB dans le plan P. Démontrez que sa projection sur le plan P est un rectangle. Démontrez que cette propriété reste vraie si AB ou CD est parallèle au plan P. A quelle condition la projection du rectangle ABCD est-elle un carré ?

TABLE DES MATIÈRES

Géométrie plane

Chapitre I. — Rapport de deux segments. - Rapport de deux vecteurs . . . 5
Exercices et problèmes 12
Chapitre II. — Théorème de Thalès 15
Exercices et problèmes 26
Chapitre III. — Triangles semblables 30
Exercices et problèmes 39
Chapitre IV. — Relations métriques dans le triangle rectangle . . . 45
Exercices et problèmes 51
Chapitre V. — Relations métriques dans le cercle 55
Exercices et problèmes 60
Chapitre VI. — Applications des relations métriques à des problèmes de construction. 63
Exercices et problèmes 66
Chapitre VII. — Rapports trigonométriques d'un angle aigu 68
Exercices et problèmes 81
Chapitre VIII. — Polygones réguliers convexes 88
Exercices et problèmes 94

Géométrie dans l'espace

Chapitre I. — Droit et plan 96
Exercices et problèmes 101
Chapitre II. — Parallélisme de droites et de plans 103
Exercices et problèmes 111
Chapitre III. — Plans parallèles 112
Exercices et problèmes 118
Chapitre IV. — Droite et plan perpendiculaires 120
Exercices et problèmes 126
Chapitre V. — Perpendiculaires et obliques 127
Exercices et problèmes 132
Chapitre VI. — Angles dièdres 134
Exercices et problèmes 140
Chapitre VII. — Plans perpendiculaires 142
Exercices et problèmes 146
Chapitre VIII. — Projections orthogonales sur un plan 147
Exercices et problèmes 151